T experts

Devoir pour le lundi 7 mars 2022

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………..…………………………

Note : ….. / 20

1°) On considère les matrices $U=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $V=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$, $W=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$.

Calculer sans trop détailler les calculs U^2, V^2, W^2, UV, VU, VW, WV, UW, WU.

2°) On pose $A=\begin{pmatrix}c&b&a&b\\b&c&b&a\\a&b&c&b\\b&a&b&c\end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois nombres complexes.

Vérifier que A peut s'exprimer comme combinaison linéaire des matrices U, V, W sous la forme
$A=\alpha U+\beta V+\gamma W$ avec $\alpha=a+2b+c$, $\beta=a-2b+c$, $\gamma=c-a$.

En déduire, grâce à une propriété, A^n pour n entier naturel quelconque non nul comme combinaison linéaire de U, V, W en utilisant α, β, γ.

Vérifier le résultat en utilisant le site dcode.

Corrigé du devoir pour le 7-3-2022

1°) On considère les matrices $U=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $V=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$, $W=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$.

Calculer sans trop détailler les calculs U^2, V^2, W^2, UV, VU, VW, WV, UW, WU.

2°) On pose $A=\begin{pmatrix}c&b&a&b\\b&c&b&a\\a&b&c&b\\b&a&b&c\end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois nombres complexes.

Vérifier que A peut s'exprimer comme combinaison linéaire des matrices U, V, W sous la forme $A=\alpha U+\beta V+\gamma W$ avec $\alpha=a+2b+c$, $\beta=a-2b+c$, $\gamma=c-a$.

$$\alpha U+\beta V+\gamma W=\alpha\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}+\beta\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}+\gamma\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\alpha\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}+2\gamma\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\right]$$ (astuce de la mise en facteurs pour éviter d'avoir des fractions)

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\alpha+\beta+2\gamma&\alpha-\beta&\alpha+\beta-2\gamma&\alpha-\beta\\\alpha-\beta&\alpha+\beta+2\gamma&\alpha-\beta&\alpha+\beta-2\gamma\\\alpha+\beta-2\gamma&\alpha-\beta&\alpha+\beta+2\gamma&\alpha-\beta\\\alpha-\beta&\alpha+\beta-2\gamma&\alpha-\beta&\alpha+\beta+2\gamma\end{pmatrix}$$

On calcule à part $\alpha+\beta+2\gamma$, $\alpha-\beta$, $\alpha+\beta-2\gamma$.

$$\alpha+\beta+2\gamma=(a+2b+c)+(a-2b+c)+2(c-a)=4c$$

$$\alpha-\beta=(a+2b+c)-(a-2b+c)=4b$$

$$\alpha+\beta-2\gamma=(a+2b+c)+(a-2b+c)-2(c-a)=4a$$

On remplace dans la matrice.

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4c & 4b & 4a & 4b \\ 4b & 4c & 4b & 4a \\ 4a & 4b & 4c & 4b \\ 4b & 4a & 4b & 4c \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4c & 4b & 4a & 4b \\ 4b & 4c & 4b & 4a \\ 4a & 4b & 4c & 4b \\ 4b & 4a & 4b & 4c \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c & b & a & b \\ b & c & b & a \\ a & b & c & b \\ b & a & b & c \end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{A}$$

On pose $\mathrm{U}'=\alpha\mathrm{U}$, $\mathrm{V}'=\beta\mathrm{V}$, $\mathrm{W}'=\gamma\mathrm{W}$.

$\mathrm{U}'\mathrm{V}'=(\alpha\mathrm{U})(\beta\mathrm{V})=\alpha\beta(\mathrm{UV})=0_n$

De même, , $\mathrm{V}'\mathrm{U}'=0_n$, $\mathrm{V}'\mathrm{W}'=0_n$, $\mathrm{W}'\mathrm{V}'=0_n$, $\mathrm{U}'\mathrm{W}'=0_n$. $\mathrm{W}'\mathrm{U}'=0_n$.

On a $\mathrm{A}=\mathrm{U}'+\mathrm{V}'+\mathrm{W}'$ donc d'après une propriété du cours, $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}^n=(\mathrm{U}')^n+(\mathrm{V}')^n+(\mathrm{W}')^n$ donc
$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}^n=(\alpha\mathrm{U})^n+(\beta\mathrm{V})^n+(\gamma\mathrm{W})^n$.

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}^n=\alpha^n\mathrm{U}^n+\beta^n\mathrm{V}^n+\gamma^n\mathrm{W}^n$.

Or d'après la question 1°), U, V, W sont des matrices idempotentes donc $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \mathrm{U}^n=\mathrm{U}$, $\mathrm{V}^n=\mathrm{V}$, $\mathrm{W}^n=\mathrm{W}$.

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}^n=\alpha^n\mathrm{U}+\beta^n\mathrm{V}+\gamma^n\mathrm{W}$.

On peut éventuellement passer aux coefficients (non demandé dans l'énoncé).

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}^n=\alpha^n\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\beta^n\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}+\gamma^n\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \alpha^n+\beta^n+2\gamma^n & \alpha^n-\beta^n & \alpha^n+\beta^n-2\gamma^n & \alpha^n-\beta^n \\ \alpha^n-\beta^n & \alpha^n+\beta^n+2\gamma^n & \alpha^n-\beta^n & \alpha^n+\beta^n-2\gamma^n \\ \alpha^n+\beta^n-2\gamma^n & \alpha^n-\beta^n & \alpha^n+\beta^n+2\gamma^n & \alpha^n-\beta^n \\ \alpha^n-\beta^n & \alpha^n+\beta^n-2\gamma^n & \alpha^n-\beta^n & \alpha^n+\beta^n+2\gamma^n \end{pmatrix}$$