T exp

Interrogation écrite du lundi 14 février 2022 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….……………………………….

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) On note E l'ensemble des entiers relatifs x tels que $5-x\equiv -9\ \ (\text{mod. } 13)$.

Compléter la phrase : Les éléments de E sont les entiers congrus à … modulo 13.

2°) Expliquer pourquoi 8 admet un inverse modulo 13 pour le produit puis donner sans justifier un inverse de 8 modulo 13.

………..

………..

II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points)

1°) Compléter la deuxième ligne du tableau de congruences ci-dessous où x est un entier relatif.
On écrira chaque fois le plus petit entier naturel.

Si $x\equiv \ldots\ \ (\text{mod. } 4)$	0	1	2	3
Alors $x^4\equiv \ldots\ \ (\text{mod. } 4)$	…	…	…	…

2°) Le but de la question est de démontrer que l'équation $x^3=2\left(y^4+1\right)$ $\left(\text{E}\right)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
On suppose que $\left(\text{E}\right)$ admet une solution $\left(x\,;\,y\right)$ dans $\mathbb{Z}^2$. Démontrer que x est pair.

………..

………..

On pose alors $x=2x'$. Démontrer que l'on a $y^4\equiv -1\ \ (\text{mod. } 4)$. Conclure.

………..

………..

………..

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{Z}$ telle que l'image d'un entier relatif *x* quelconque est donnée par $f(x)=\frac{x}{3}$ si *x* est divisible par 3 et $f(x)=x-1$ si *x* n'est pas divisible par 3.

1°) Vrai ou faux ? Écrire la lettre V ou F en bout de ligne.

« L'image de tout entier relatif par *f* est un entier relatif ». ….

« Tout entier relatif admet au moins un antécédent par *f*. » ….

2°) Pour tout entier relatif *x*, on pose $g(x)=f(x)+f(2x)$.
On admet l'équivalence : « *x* divisible par 3 si et seulement si 2*x* est divisible par 3 ».
Exprimer $g(x)$ en fonction de *x*. Rédiger correctement en écrivant une idée par ligne.

………

………

………

………

3°) Soit *n* un entier naturel.

Compléter par le plus petit entier naturel : $10^n \equiv \ldots$ (mod. 3).

Quels sont les antécédents de 10^n par *f* ? ………………………

IV. (2 points)

Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe 2i.
On note *E* l'ensemble des points M de *P*, d'affixe *z*, tels que $|2z-4\mathrm{i}|=5$.

Compléter la phrase :

L'ensemble *E* est ……………………………………………………………………………………………… .

V. (2 points)

Le plan orienté *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère la transformation *f* qui à tout point $\mathrm{M}(x\,;y)$ de *P* associe le point $\mathrm{M}'(x'\,;y')$ tel que $x'=y$ et $y'=-x$. Quelle est la nature de *f* ? Répondre avec précision.

………

Corrigé de l'interrogation écrite du 14-2-2022

I.

1°) On note E l'ensemble des entiers relatifs x tels que $5-x\equiv-9 \pmod{13}$.

Compléter la phrase : Les éléments de E sont les entiers congrus à 1 modulo 13.

2°) Expliquer pourquoi 8 admet un inverse modulo 13 pour le produit puis donner sans justifier un inverse de 8 modulo 13.

8 et 13 sont premiers entre eux donc 8 admet un inverse pour le produit modulo 13.

5 est un inverse de 8 modulo 13 car $5\times8\equiv1 \pmod{13}$.

On peut éventuellement utiliser la calculatrice en rentrant la fonction $f : x \mapsto$ reste de la division euclidienne de $8x$ par 13.

II.

1°) Compléter la deuxième ligne du tableau de congruences ci-dessous où x est un entier relatif.
On écrira chaque fois le plus petit entier naturel.

Si $x\equiv\ldots \pmod{4}$	0	1	2	3
Alors $x^4\equiv\ldots \pmod{4}$	…	…	…	…

Si $x\equiv\ldots \pmod{4}$	0	1	2	3
Alors $x^4\equiv\ldots \pmod{4}$	0	1	0	1

2°) Le but de la question est de démontrer que l'équation $x^3=2\left(y^4+1\right)$ (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
On suppose que (E) admet une solution $(x\,;y)$ dans $\mathbb{Z}^2$. Démontrer que x est pair.

On a $x^3=2\left(y^4+1\right)$. Or y^4+1 est un entier puisque $y\in\mathbb{Z}$.
On en déduit que x^3 est un multiple de 2 et, par conséquent, x^3 est un nombre pair.
Or un entier relatif et n'importe quelle puissance de cet entier d'exposant entier naturel non nul sont de même parité (propriété du cours).
On peut aussi dire que le cube d'un entier relatif est de la même parité que cet entier (cas particulier de la propriété précédente).
On en déduit que x est pair.

On pose alors $x = 2x'$. Démontrer que l'on a $y^4 \equiv -1 \pmod{4}$. Conclure.

L'égalité $x^3 = 2\left(y^4+1\right)$ donne $(2x')^3 = 2\left(y^4+1\right)$ qui, en simplifiant les deux membres par 2, entraîne $4x'^3 = y^4+1$.

On a donc $y^4+1 = 4x'^3$.

Cette égalité permet de dire que y^4+1 est divisible par 4 (ou, ce qui revient au même, que $y^4+1 \equiv 0 \pmod{4}$).

On en déduit que $y^4 \equiv -1 \pmod{4}$.

Le tableau de congruences de la question 1°) montre que la puissance 4 de n'importe quel entier relatif n'est jamais congrue à – 1 modulo 4 (on notera qu'un entier relatif est congru à – 1 modulo 4 si et seulement si il est congru à 3 modulo 4).

$y^4 \equiv -1 \pmod{4}$ n'est donc pas possible.

On peut donc conclure que (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Commentaires :

- (E) est une équation diophantienne.
- On vient de faire un raisonnement par l'absurde.

III.

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{Z}$ telle que l'image d'un entier relatif *x* quelconque est donnée par $f(x) = \dfrac{x}{3}$ si *x* est divisible par 3 et $f(x) = x - 1$ si *x* n'est pas divisible par 3.

1°) Vrai ou faux ? Écrire la lettre V ou F en bout de ligne.

« L'image de tout entier relatif par *f* est un entier relatif ». V

« Tout entier relatif admet au moins un antécédent par *f*. » V

Justification :

Affirmation 1 :

On raisonne par disjonction de cas.

Si *x* est divisible par 3, alors $f(x) = \dfrac{x}{3}$ donc $f(x)$ est un entier relatif.

Si *x* n'est pas divisible par 3, alors $f(x) = x - 1$ donc, comme *x* est un entier relatif, $f(x)$ est aussi un entier relatif.

Dans chacun des deux cas, $f(x)$ est un entier relatif.

On peut dire que *f* est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. On peut écrire $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Affirmation 2 :

Soit k un entier relatif.

$3k$ est un entier relatif.
En effet, $3k$ est divisible par 3 donc $f\left(3k\right)=\dfrac{3k}{3}=k$.
$3k$ est donc un antécédent de k.

2°) Pour tout entier relatif x, on pose $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f\left(2x\right)$.
On admet l'équivalence : « x divisible par 3 si et seulement si $2x$ est divisible par 3 ».
Exprimer $g\left(x\right)$ en fonction de x. Rédiger correctement en écrivant une idée par ligne.

1er cas : x est divisible par 3

Dans ce cas, $2x$ est aussi divisible par 3.

$$g\left(x\right)=\frac{x}{3}+\frac{2x}{3}$$

$$=\frac{3x}{3}$$

$$=x$$

2e cas : x n'est pas divisible par 3

Dans ce cas, $2x$ n'est pas divisible par 3 (d'après l'équivalence donnée dans l'énoncé).

$$g\left(x\right)=x-1+2x-1$$

$$=3x-2$$

3°) Soit n un entier naturel.

Compléter par le plus petit entier naturel : $10^n\equiv 1$ (mod. 3).

Cette relation provient de $10\equiv 1$ (mod. 3).

Quels sont les antécédents de 10^n par f ? 3×10^n et 10^n+1

On cherche les entiers relatifs x tels que $f\left(x\right)=10^n \quad \left(1\right)$.

1er cas : x est divisible par 3

$\left(1\right)$ s'écrit alors $\dfrac{x}{3}=10^n$ qui donne immédiatement $x=3\times10^n$.

3×10^n est divisible par 3 donc on peut bien retenir cette valeur.

2^e cas : x n'est pas divisible par 3

(1) s'écrit alors $x-1=10^n$ qui donne immédiatement $x=10^n+1$.

Or $10^n \equiv 1 \pmod{3}$ donc $10^n+1 \equiv 2 \pmod{3}$ ce qui montre que 10^n+1 n'est pas divisible par 3.

On peut donc bien retenir cette valeur.

IV.

Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe 2i.
On note *E* l'ensemble des points M de *P*, d'affixe *z*, tels que $\left| 2z-4\mathrm{i} \right| = 5$.

Compléter la phrase :

L'ensemble *E* est le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{5}{2}$.

On rédige par équivalences.

On n'introduit pas l'écriture algébrique de z.

Soit M un point quelconque du plan *P*, d'affixe *z*.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M} \in E \; & \Leftrightarrow \left| 2\left(z-2\mathrm{i}\right) \right| = 5 \\
& \Leftrightarrow \left| 2 \right| \times \left| z-2\mathrm{i} \right| = 5 \\
& \Leftrightarrow 2 \times \left| z-2\mathrm{i} \right| = 5 \\
& \Leftrightarrow \left| z-2\mathrm{i} \right| = \frac{5}{2} \\
& \Leftrightarrow \left| z-z_{\mathrm{A}} \right| = \frac{5}{2} \\
& \Leftrightarrow \mathrm{AM} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

L'ensemble *E* est le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{5}{2}$.

V.

Le plan orienté *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère la transformation *f* qui à tout point $\mathrm{M}\left(x\,;y\right)$ de *P* associe le point $\mathrm{M}'\left(x'\,;y'\right)$ tel que $x'=y$ et $y'=-x$. Quelle est la nature de *f* ? Répondre avec précision.

f est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

On peut aussi donner $\dfrac{3\pi}{2}$ pour angle.

On notera l'utilisation de l'article défini « la ».

On peut faire un graphique pour avoir une idée du résultat.

Rappel :

On utilise l'expression analytique d'une rotation de centre O et d'angle θ.

Soit M un point quelconque du plan et M' son image par la rotation de centre O et d'angle θ.

On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.

On a les formules suivantes $\begin{cases} x'=(\cos\theta)x-(\sin\theta)y \\ y'=(\sin\theta)x+(\cos\theta)y \end{cases}$ qui s'écrivent sous forme matricielle $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ici, on sait que $\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases}$.

On a $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

On peut donc écrire $\begin{cases} x'=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)x-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)y \\ y'=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)x+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)y \end{cases}$.

On en déduit que $f=R_{\left(\mathrm{O},\,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

f est le quart de tour indirect de centre O.