T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 11 février 2022

Durée : 30 minutes
Calculatrice autorisée
Fiche autorisée

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (1 point) Question de cours

Soit u et v deux fonctions définies respectivement sur des intervalles I et J telles que $\forall x \in I \quad u(x) \in J$.

Soit a, b, c trois réels tels que $a \in I$ et $b \in J$.

Compléter :

$$\text{Si } \lim_{x \to a} u(x) = b \text{ et } \lim_{x \to b} v(x) = c \text{, alors } \lim_{x \to a} (v \circ u)(x) = \ldots\ldots$$

II. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

On admet le résultat suivant qui se démontre facilement grâce au théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{X} = 0 \\ \lim\limits_{X \to \ldots} \mathrm{e}^X = \ldots \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots$$

III. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 3\ln(2-x)$ définie sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \ldots} \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{X} = \ldots \\ \lim\limits_{X \to \ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim_{x \to 2^-} f(x) = \ldots\ldots$$

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $\mathrm{A}(1\,;-2\,;4)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}(2\,;1\,;-1)$.

1°) On note D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Parmi les points suivants lequel appartient à D ?

$\mathrm{E}(2\,;1\,;-1)$ $\quad$ $\mathrm{F}(-3\,;-4\,;6)$ $\quad$ $\mathrm{G}(-3\,;-4\,;2)$ $\quad$ $\mathrm{H}(-5\,;-5\,;1)$

2°) Soit Δ la droite passant par A et admettant le vecteur $\vec{k}$ pour vecteur directeur. On note B le point d'intersection de Δ et du plan $(x\mathrm{O}y)$. Quelles sont les coordonnées de B ?

………………

3°) Quelles sont les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\vec{u}$?

………………

V. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthononormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le point $\mathrm{A}(0\,;0\,;-3)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}\,(t-1\,;t+1\,;1)$ où t est un réel.

1°) Calculer $\|\vec{u}\|^2$ en fonction de t.

On donnera le résultat sous forme développée réduite.

$\|\vec{u}\|^2 =$ ....

Déterminer les réels t tels que $\|\vec{u}\| = 2 \quad (1)$.

....

....

....

....

....

....

....

2°) Déterminer une équation de la sphère S de centre A passant par O.

.... (une seule réponse)

VI. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère l'équation différentielle $y' + y = (2x-1)\mathrm{e}^x \quad (\mathrm{E})$.

1°) Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E).

....

....

....

....

....

....

2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0).

....

....

....

3°) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On admet l'équivalence suivante :

« v est solution de $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow v-u$ solution de (E_0) ».

À l'aide de ce résultat, déterminer les solutions de (E).

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé de l'interrogation écrite du 11-2-2022

I. Question de cours

Soit u et v deux fonctions définies respectivement sur des intervalles I et J telles que $\forall x \in I \quad u(x) \in J$.

Soit a, b, c trois réels tels que $a \in I$ et $b \in J$.

Compléter :

$$\text{Si } \lim_{x \to a} u(x) = b \text{ et } \lim_{x \to b} v(x) = c \text{, alors } \lim_{x \to a} (v \circ u)(x) = c.$$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

On admet le résultat suivant qui se démontre facilement grâce au théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{X} = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \mathrm{e}^{X} = 1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto 3\ln(2-x)$ définie sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \underbrace{(2-x)}_{X} = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} (3\ln X) = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty.$$

La précision 0^+ est importante.

IV.

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le point $\mathrm{A}(1\,;-2\,;4)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}(2\,;1\,;-1)$.

1°) On note D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Parmi les points suivants lequel appartient à D ?

$\mathrm{E}(2\,;1\,;-1)$ $\quad$ $\mathrm{F}(-3\,;-4\,;6)$ $\quad$ $\mathrm{G}(-3\,;-4\,;2)$ $\quad$ $\mathrm{H}(-5\,;-5\,;1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}(-4\,;-2\,;2)$

On constate que $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = -2\vec{u}$. Par conséquent, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ est colinéaire à $\vec{u}$ ce qui permet de dire que $\mathrm{F} \in D$.

2°) Soit Δ la droite passant par A et admettant le vecteur $\vec{k}$ pour vecteur directeur. On note B le point d'intersection de Δ et du plan $(x\mathrm{O}y)$. Quelles sont les coordonnées de B ?

$\mathrm{B}(1\,;-2\,;0)$

On peut faire un petit graphique (graphique avec représentation du repère en perspective).
B a la même abscisse et la même ordonnée que A : $x_B = x_A$ et $y_B = y_A$.
Comme $B \in (xOy)$, $z_B = 0$.

3°) Quelles sont les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = 2\vec{u}$?

On traduit l'égalité vectorielle en coordonnées : $\begin{cases} x_C - x_A = 2x_{\vec{u}} \\ y_C - y_A = 2y_{\vec{u}} \\ z_C - z_A = 2z_{\vec{u}} \end{cases}$.

Avec les valeurs données dans l'énoncé, on a donc $\begin{cases} x_C - 1 = 2\times 2 \\ y_C + 2 = 2\times 1 \\ z_C - 4 = 2\times(-1) \end{cases}$.

On obtient $C(5\,;0\,;2)$.

V.

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthononormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(0\,;0\,;-3)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}(t-1\,;t+1\,;1)$ où t est un réel.

1°) Calculer $\|\vec{u}\|^2$ en fonction de t.
On donnera le résultat sous forme développée réduite.

$$\|\vec{u}\|^2 = 2t^2 + 3$$

$\|\vec{u}\|^2 = (t-1)^2 + (t+1)^2 + 1^2$

$= t^2 + \cancel{2t} + 1 + t^2 - \cancel{2t} + 1 + 1$

$= 2t^2 + 3$

Déterminer les réels t tels que $\|\vec{u}\| = 2 \quad (1)$.

On rédige sous forme d'une chaîne d'équivalences.

$(1) \Leftrightarrow 2t^2 + 3 = 4$

$\Leftrightarrow 2t^2 = 1$

$\Leftrightarrow t^2 = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $t = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2°) Déterminer une équation de la sphère S de centre A passant par O.

$$x^2+y^2+(z+3)^2=9 \quad \text{(une seule réponse)}$$

On peut éventuellement obtenir une équation cartésienne de S : $x^2+y^2+z^2+6z=0$.

VI.

On considère l'équation différentielle $y'+y=(2x-1)\mathrm{e}^x \quad (\mathrm{E})$.

1°) Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E).

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=1\times\mathrm{e}^x+(x-1)\times\mathrm{e}^x=\left[1+(x-1)\right]\times\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)+u(x)=x\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x=\left[x+(x-1)\right]\mathrm{e}^x=(2x-1)\mathrm{e}^x$$

Donc la fonction u est une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0).

L'équation homogène associée (E_0) s'écrit : $y'+y=0$ soit $y'=-y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-1$.

Les solutions de (E_0) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})$.

3°) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On admet l'équivalence suivante :

« v est solution de $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow v-u$ solution de (E_0) ».

À l'aide de ce résultat, déterminer les solutions de (E).

$$\begin{aligned}
v \text{ est solution de } (\mathrm{E}) &\Leftrightarrow v-u \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0)\\
&\Leftrightarrow v-u \text{ est définie par } (v-u)(x)=k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)-u(x)=k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)=u(x)+k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})$.