T
experts

Devoir pour le jeudi 3 février 2022

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………..………………………………………

Note : ….. / 20

Soit a et b deux réels vérifiant les deux égalités $a^3-3ab^2=11 \quad (1)$ et $b^3-3a^2b=2 \quad (2)$.
On pose $z=a+\mathrm{i}b$.
Calculer z^3.
En déduire la valeur de a^2+b^2.

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

……..………

Corrigé du devoir pour le 3-2-2022

On pose $z = a + \mathrm{i}b$.

Calculer z^3.

$z^3 = (a+\mathrm{i}b)^3$

$= a^3 + 3a^2 \times \mathrm{i}b + 3a \times (\mathrm{i}b)^2 + (\mathrm{i}b)^3$

$= a^3 + 3\mathrm{i}a^2b + 3a \times (-b^2) + \mathrm{i}^3b^3$

$= a^3 + 3\mathrm{i}a^2b - 3ab^2 - \mathrm{i}b^3$

$= a^3 - 3ab^2 + \mathrm{i}(3a^2b - b^3)$

$= 11 - 2\mathrm{i}$ (en utilisant les égalités $a^3 - 3ab^2 = 11 \quad (1)$ et $b^3 - 3a^2b = 2 \quad (2)$)

On peut dire que z est une racine cubique de $11 - 2\mathrm{i}$.

En déduire la valeur de $a^2 + b^2$.

On va utiliser l'égalité $z^3 = 11 - 2\mathrm{i}$ en écrivant l'égalité des modules de chaque membre.

On a $|z^3| = |11 - 2\mathrm{i}|$ donc $|z|^3 = \sqrt{11^2 + (-2)^2}$ (car on sait que $|z^3| = |z|^3$) d'où $|z|^3 = \sqrt{125}$.

On a donc $|z|^3 = 5\sqrt{5}$ soit $|z|^3 = \left(\sqrt{5}\right)^3$ d'où $|z| = \sqrt{5}$.

Or $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On a donc $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$.

D'où $a^2 + b^2 = 5$.