T spécialité

Contrôle du jeudi 27 janvier 2022

Durée : 4 heures
- Calculatrice
- Fiche autorisée

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………..…………………………….

Note : ….. / 20

Le sujet comporte 5 feuilles au total : cette feuille et 4 feuilles numérotées de 1 à 4.
Toutes sont à rendre dans la copie, sans les agrafer.

Il est demandé d'écrire son numéro sur chaque feuille dans le cadre prévu à cet effet.

Fiche format A4 écrite uniquement sur le recto à disposition.

I	5 points		
II	2 points		
III	4 points		
IV	5 points		
V	4 points		
Bonus	1 point		

……

……

……

……

……

Feuille 1

Numéro : …..

I. (5 points)

Partie A

Un test est mis au point pour détecter une maladie lors d'une épidémie dans un pays. Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie. Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs. Parmi les individus sains, 1 % est déclaré positif. Une personne est choisie au hasard dans la population.
On note :
• A l'événement : « La personne est infectée par la maladie » ;
• B l'événement : « Le test est positif ».
Construire au brouillon un arbre pondéré modélisant la situation proposée en utilisant les événements A et B. On écrira les probabilités sous forme décimale.

1°) Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?
On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

………..…………………………

………..…………………………

2°) Déterminer la probabilité que le test de la personne choisie soit positif. On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

………..…………………………

………..…………………………

………..…………………………

………..…………………………

………..…………………………

3°) On sait que le test de la personne choisie est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
On donnera la valeur arrondie au millième.

………..…………………………

………..…………………………

………..…………………………

Partie B

Un an après, la situation épidémique ayant évolué, la probabilité que le test soit positif chez une personne prise au hasard devient 0,054.

1°) On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

………..……….

………..…….

Déterminer la probabilité pour qu'au moins deux personnes aient un test positif.
On donnera la valeur arrondie au millième.
On pourra utiliser directement la calculatrice.

………..…………….

2°) On décide de tester n personnes dans ce pays, où n est un entier naturel non nul. On admet que les résultats des tests sont indépendants les uns des autres.
Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité p_n qu'au moins une personne ait un test positif.

…………………………… (une seule égalité sans explication)

À partir de quelle valeur de n cette probabilité est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?
On écrira l'inéquation à résoudre et on détaillera les étapes de résolution.

………..……………

……………………………………………………………………………………..……………………………………

……………………………………………………………………………………..……………………………………

……………………………………………………………………………………..……………………………………

……………………………………………………………………………………..……………………………………

……………………………………………………………………………………..……………………………………

………..……………

Feuille 2 **Numéro : …..**

II. (2 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient *k* boules blanches (*k* entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
L'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite une boule au hasard dans U_2.
L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve aléatoire E.
On note B_1 (respectivement N_1) l'événement : « La boule tirée dans l'urne U_1 est blanche (respectivement noire) ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'événement : « La boule tirée dans l'urne U_2 est blanche (respectivement noire) ».
Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve E. Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche dans l'urne U_2, il reçoit 12 euros. Sinon, il ne reçoit rien et il perd sa mise.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur à la fin de l'épreuve.
Les valeurs possibles de X sont 4 et – 8.
Déterminer la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.
Indication : Calculer les probabilités des événements B_2 et N_2.

Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de *k* et déterminer pour quelles valeurs de *k* cette espérance est strictement positive.

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+3u_n}$ pour tout entier naturel n.

On admet que pour tout entier naturel n on a $u_n \neq 1$. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

………

………

………

………

………

………

………

………

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n+1}$ puis que $u_n = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

………

………

………

………

………

Feuille 3

Numéro : …..

IV. (5 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2\ln x$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

………

………

………

2°) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

Faire ensuite le tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

Compléter le tableau de variations avec les limites. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3°) La fonction *f* est-elle convexe ou concave ? Justifier.

………

………

………

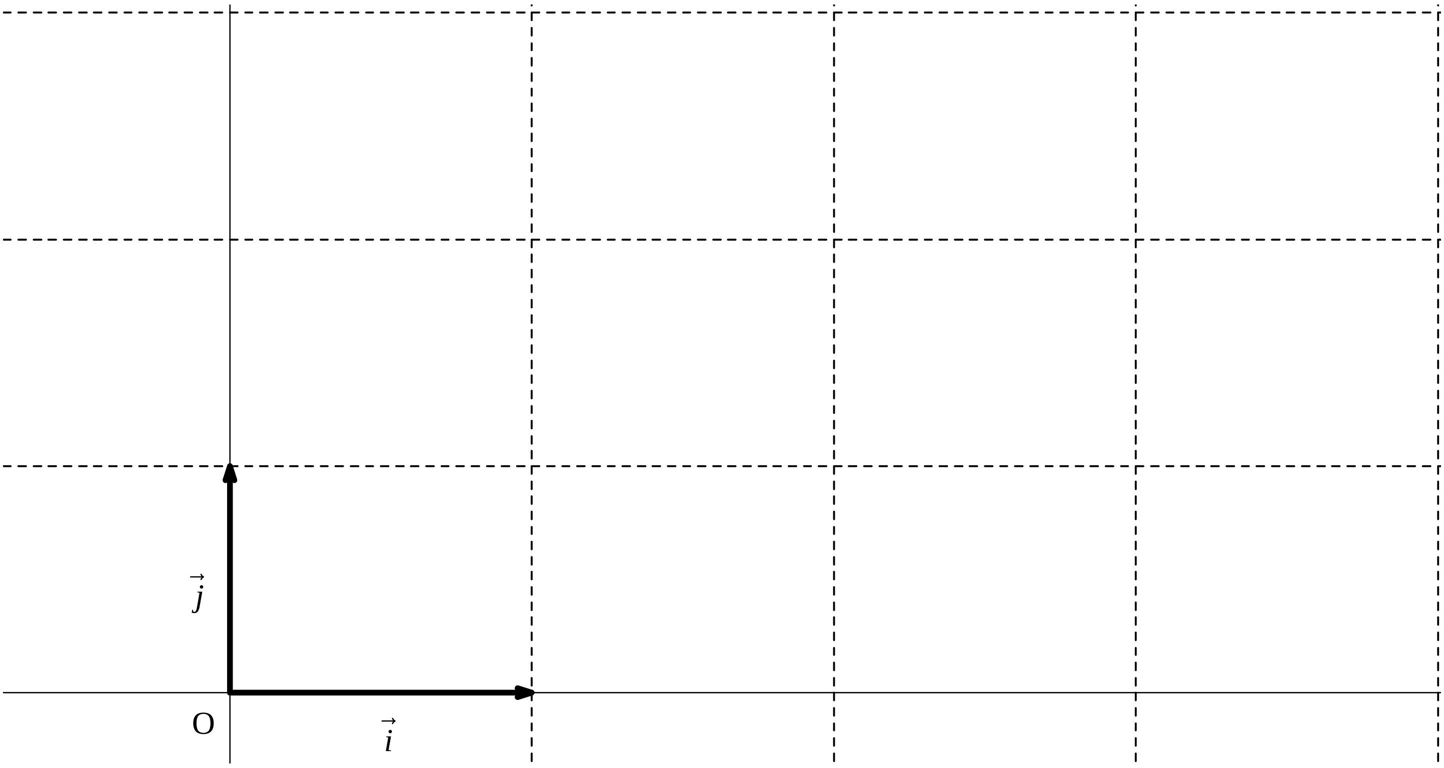
………

………

………

………

4°) Faire au brouillon un petit tableau de valeurs puis tracer la courbe $\mathcal{C}$ avec soin sur le graphique ci-dessous.
On n'oubliera pas de tracer la tangente horizontale.



5°) Quel est le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2 ? On attend une justification succincte.

……

……

……

6°) On considère la fonction Python d'en-tête `seuil(A)` qui prend pour argument un réel A et qui renvoie le plus petit entier naturel n supérieur ou égal à 1 tel que $f(n) \geqslant \mathrm{A}$.
Compléter les instructions manquantes dans l'encadré ci-contre.

Que renvoie la fonction pour $\mathrm{A} = 2022$?
Aucune explication n'est attendue.

……….

```
from math import log

def f(x):
    y=x**2-2*log(x)
    return y

def seuil(A):
    n=1
    while f(n) … A:

        ………….
    return n
```

Feuille 4

Numéro : …..

7°) Pour tout réel $a > 0$, on note M et N les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et $\frac{1}{a}$.
Que peut-on dire des coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}$ en M et en N ?

On note I le milieu de [MN].
Calculer les coordonnées de I en fonction de a.
En déduire que I appartient à une parabole Γ dont on donnera une équation.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Feuille 5 | **Numéro : …..**

V. (4 points)

Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1°) Démontrer que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$.

………

………

………

2°) Soit M et N les points définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BC}$ où λ désigne un réel fixé.
Démontrer que $\overrightarrow{MN}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{DC}$.

Indication : On commencera par écrire $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$.

En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont coplanaires.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

3°) On note U le milieu de $[\mathrm{MN}]$.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{BN}}$.

Démontrer que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{IM}} + \overrightarrow{\mathrm{IN}}$ puis que $\vec{u} = 2\overrightarrow{\mathrm{IU}}$.

Démontrer que $\vec{u} = \lambda\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$.

En déduire, en utilisant le résultat établi à la question 1°), que $\overrightarrow{\mathrm{IU}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.

On suppose que I et J ne sont pas confondus. Quel est l'ensemble des points U lorsque λ décrit $\mathbb{R}$?

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Bonus à traiter la fin :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^{\,2}+1}}$ pour tout entier naturel *n*.

Déterminer une expression de u_n en fonction de *n*.

Aucune méthode n'est imposée.

Corrigé du contrôle du 27-1-2022

I.

Partie A

Un test est mis au point pour détecter une maladie lors d'une épidémie dans un pays. Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie. Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs. Parmi les individus sains, 1 % est déclaré positif. Une personne est choisie au hasard dans la population.
On note :
• A l'événement : « La personne est infectée par la maladie » ;
• B l'événement : « Le test est positif ».
Construire au brouillon un arbre pondéré modélisant la situation proposée en utilisant les événements A et B. On écrira les probabilités sous forme décimale.

1°) Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?
On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

On cherche $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$$

$$=0,07\times 0,80$$

$$=0,056$$

2°) Déterminer la probabilité que le test de la personne choisie soit positif. On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

On cherche $P(\mathrm{B})$.

A et $\overline{\mathrm{A}}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}).$$

$$=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}})\times P(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}})$$

$$=0,056+0,93\times 0,01$$

$$=0,0653$$

3°) On sait que le test de la personne choisie est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
On donnera la valeur arrondie au millième.

On cherche $P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$.
On applique la définition d'une probabilité conditionnelle.

$$P(\text{A}/\text{B})=\frac{P(\text{A}\cap\text{B})}{P(\text{B})}$$

$$=\frac{0,056}{0,0653}$$

$$=0,857580398...$$

La valeur arrondie au millième de $P(\text{A}/\text{B})$ est 0,858.

Partie B

Un an après, la situation épidémique ayant évolué, la probabilité que le test soit positif chez une personne prise au hasard devient 0,054.

1°) On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

L'épreuve « choisir une personne au hasard » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité *P* qui conduit

- soit à un succès S : « Le test est positif » $P(\text{S})=0,054$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « Le test est négatif » $P(\overline{\text{S}})=1-0,054=0,946$

On répète cette épreuve 10 fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 (nombre de répétitions) et 0,054 (probabilité qu'une personne fasse sonner le portique de sécurité).

Déterminer la probabilité pour qu'au moins deux personnes aient un test positif.
On donnera la valeur arrondie au millième.
On pourra utiliser directement la calculatrice.

On cherche $P(\text{X}\geqslant 2)$.

Grâce à la calculatrice, on obtient $P(\text{X}\geqslant 2)=0,0983478...$.

Le résultat est un nombre décimal puisque la probabilité d'un succès est un nombre décimal.

La valeur arrondie de cette probabilité est 0,098.

2°) On décide de tester *n* personnes dans ce pays, où *n* est un entier naturel non nul. On admet que les résultats des tests sont indépendants les uns des autres.
Donner l'expression, en fonction de *n*, de la probabilité p_n qu'au moins une personne ait un test positif.

$$p_n=1-0,946^n \quad \text{(une seule égalité sans explication)}$$

Il y a deux méthodes. La première est à privilégier car plus simple.

1ère méthode :

$$p_n = 1 - P\left(\underbrace{\overline{S}\text{-}\overline{S}\text{-}\ldots\text{-}\overline{S}}\right) \qquad (n \text{ échecs})$$

$$= 1 - \left[P\left(\overline{S}\right)\right]^n \qquad \text{(principe multiplicatif par indépendance des épreuves de Bernoulli)}$$

$$= 1 - 0{,}946^n$$

2e méthode :

On note Y le nombre de personnes qui présentent un test positif.
Y suit la loi binomiale de paramètres n (nombre de personnes) et 0,054 (probabilité qu'une personne présente un test positif).

$$p_n = P(\mathrm{Y} \geqslant 1)$$

$$= 1 - P(\mathrm{Y} < 1) \qquad \left(\text{on pourrait écrire } p_n = \sum_{k=1}^{k=n} P(\mathrm{Y} = k) \text{ mais ce n'est pas astucieux}\right)$$

$$= 1 - P(\mathrm{Y} = 0)$$

$$= 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}054^0 \times 0{,}946^n$$

$$= 1 - 0{,}946^n \qquad \left(\text{car } \binom{n}{0} = 1\right)$$

À partir de quelle valeur de n cette probabilité est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?
On écrira l'inéquation à résoudre et on détaillera les étapes de résolution.

On cherche les entiers naturels n non nuls tels que $p_n \geqslant 0{,}99 \quad (1)$.

La première étape consiste à composer chacun des deux membres par la fonction logarithme népérien.
On a tout à fait le droit.

On utilise la fonction logarithme népérien ou la fonction logarithme décimal ou n'importe quelle fonction logarithme de base quelconque.
Le plus logique est toutefois la fonction logarithme népérien.

On utilise l'équivalence fondamentale liée au fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$: pour $(a\,;b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $a \leqslant b \Leftrightarrow \ln a \leqslant \ln b$.

On écrit d'une couleur différente les ln que l'on « rajoute » de part et d'autre.

$$(1) \Leftrightarrow 1 - 0{,}946^n \geqslant 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow -0{,}946^n \geqslant -0{,}01$$

$$\Leftrightarrow 0{,}946^n \leqslant 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[(0{,}946)^n\right] \leqslant \ln 0{,}01 \qquad (\text{car la fonction ln est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[)$$

$$\Leftrightarrow n \ln 0{,}946 \leqslant \ln 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}946} \qquad (\text{en effet, } 0{,}946 < 1 \text{ donc } \ln 0{,}946 < 0)$$

Il est fondamental de bien noter que ln 0,946 est strictement négatif.
Quand on multiplie ou que l'on divise les deux membres d'une inégalité par un réel négatif, le sens de l'inégalité change de sens.

Avec la fonction logarithme décimal, on a $n \geqslant -\dfrac{2}{\log 0,946}$.

D'après la calculatrice, on a : $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,946} = 82,9570415...$ (il est possible de démontrer qu'il s'agit d'un nombre irrationnel).

Or $n \in \mathbb{N}$ donc $(1) \Leftrightarrow n \geqslant 83$ (car le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,946}$ est 83).

Commentaires :

• On peut éventuellement utiliser un programme Python.

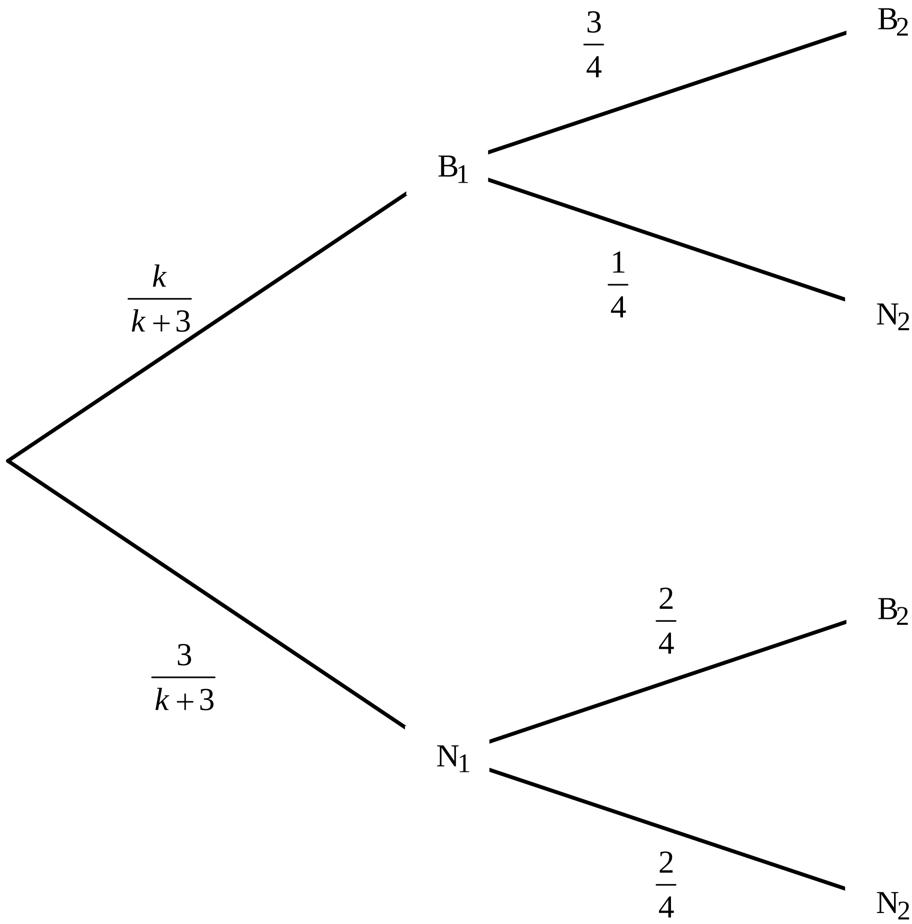
• On peut aussi procéder par essais en changeant la valeur de *n* et en calculant $P(\mathrm{Y} \geqslant 1)$.

II.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient *k* boules blanches (*k* entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
L'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite une boule au hasard dans U_2.
L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve aléatoire $\mathcal{E}$.
On note B_1 (respectivement N_1) l'événement : « La boule tirée dans l'urne U_1 est blanche (respectivement noire) ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'événement : « La boule tirée dans l'urne U_2 est blanche (respectivement noire) ».
Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve $\mathcal{E}$. Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche dans l'urne U_2, il reçoit 12 euros. Sinon, il ne reçoit rien et il perd sa mise.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur à la fin de l'épreuve.
Les valeurs possibles de X sont 4 et – 8.
Déterminer la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.
Indication : Calculer les probabilités des événements B_2 et N_2.

x_i	4	– 8	
$P(\mathrm{X} = x_i)$	$\dfrac{3k+6}{4(k+3)}$	$\dfrac{k+6}{4(k+3)}$	Total $=1$

Il faut tenir commode de la composition de l'urne U_2 après le premier tirage.



On utilise la formule des probabilités totales.

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{B}_2) &= P(\mathrm{B}_2 \cap \mathrm{B}_1) + P(\mathrm{B}_2 \cap \mathrm{N}_1) \\
&= \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{k+3} \times \frac{2}{4} \\
&= \frac{3k}{4(k+3)} + \frac{6}{4(k+3)} \\
&= \frac{3k+6}{4(k+3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{N}_2) &= P(\mathrm{N}_2 \cap \mathrm{B}_1) + P(\mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_1) \\
&= \frac{k+6}{4(k+3)}
\end{aligned}
$$

On vérifie que la somme des probabilités de B_2 et de N_2 est égale à 1.

Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de *k* et déterminer pour quelles valeurs de *k* cette espérance est strictement positive.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 4 \times \frac{3k+6}{4(k+3)} - 8 \times \frac{k+6}{4(k+3)}$$

$$= \frac{3k+6}{k+3} - 2 \times \frac{k+6}{k+3}$$

$$= \frac{3k+6-2(k+6)}{k+3}$$

$$= \frac{k-6}{k+3}$$

On cherche les entiers naturels *k* non nuls tels que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) > 0$ soit $\frac{k-6}{k+3} > 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow k-6 > 0 \quad (\text{car } k+3 > 0)$

$\Leftrightarrow k > 6$

L'espérance de X est strictement positive pour tous les entiers naturels *k* supérieurs ou égaux à 7.

Compléments :

On peut chercher la limite de $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ lorsque $k \to +\infty$.

On obtient $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$ (règle du quotient des monômes de plus haut degré).

On peut démontrer que $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ augmente lorsque *k* augmente.

Il est possible de déterminer des valeurs seuils (par exemple, le plus petit entier naturel *k* tel que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) > 0{,}99$).

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+3u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

On admet que pour tout entier naturel *n* on a $u_n \neq 1$. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

En déduire, pour tout entier naturel *n*, l'expression de v_n en fonction de *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{4u_n}{1+3u_n}}{1-\dfrac{4u_n}{1+3u_n}}$$

$$= \frac{\dfrac{4u_n}{1+3u_n}}{\dfrac{1+3u_n-4u_n}{1+3u_n}}$$

$$= \frac{\dfrac{4u_n}{1+3u_n}}{\dfrac{1-u_n}{1+3u_n}}$$

$$= \frac{4u_n}{\cancel{1+3u_n}} \times \frac{\cancel{1+3u_n}}{1-u_n}$$

$$= \frac{4u_n}{1-u_n}$$

$$= 4 \times \frac{u_n}{1-u_n}$$

$$= 4 \times v_n$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = 4v_n$, on peut affirmer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 4$.

On calcule le premier terme dont on aura besoin.

$$v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}} = \frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 1$$

On peut donner l'expression du terme général de (v_n) :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times 4^n$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 4^n$

Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1}$ puis que $u_n = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

On utilise la relation $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

On obtient $v_n\left(1-u_n\right)=u_n$ ce qui donne $v_n - u_n v_n = u_n$ d'où $v_n = u_n + u_n v_n$ ou encore $v_n = u_n\left(1+v_n\right)$.
D'après l'expression de v_n obtenue précédemment, on observe que $1+v_n \neq 0$.
On peut donc écrire $u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{4^n}{4^n+1}$.

En forçant la factorisation par 4^n au dénominateur, on peut écrire $u_n = \dfrac{4^n}{4^n\left(1+\dfrac{1}{4^n}\right)}$ ce qui donne en simplifiant

$u_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4^n}}$ et finalement, on obtient l'expression demandée $u_n = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$.

Comme $-1<\dfrac{1}{4}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]=1$. Par passage à l'inverse, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
La suite $\left(u_n\right)$ converge vers 1.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2\ln x$ définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\ln x\right) = -\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une différence $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x=0$ c'est-à-dire l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

2°) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$.
Faire ensuite le tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.
Compléter le tableau de variations avec les limites. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$

Pour l'étude du signe, on écrit cette dérivée sous la forme d'un seul quotient en factorisant au maximum.

$$= \frac{2x^2 - 2}{x}$$

$$= \frac{2\left(x^2 - 1\right)}{x}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+1)}{x} \qquad \text{(ligne facultative)}$$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $2\left(x^2 - 1\right)$		$-$	0	$+$	
Signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule la valeur du minimum global de *f* sur $\mathbb{R}_+^*$: $f(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1 - 2 \times 0 = 1$.

f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;1\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.

3°) La fonction *f* est-elle convexe ou concave ? Justifier.

On calcule la dérivée seconde de *f*.

On reprend la forme $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$ plutôt que la forme en un seul quotient.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) = 2 + \dfrac{2}{x^2}$

On observe immédiatement que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) > 0$ (le signe de $f''(x)$ est évident), ce qui entraîne $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) \geqslant 0$.

On en déduit que *f* est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

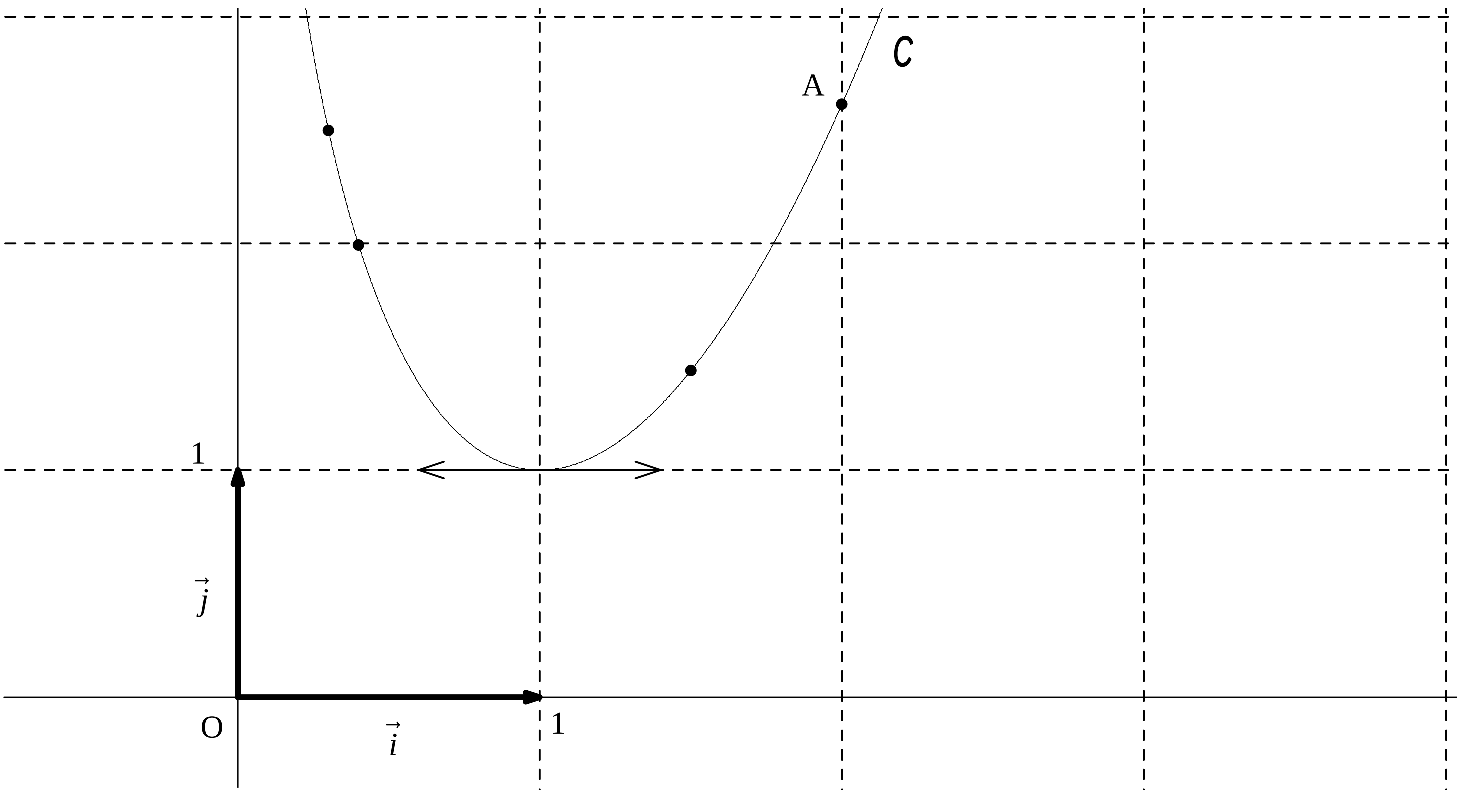
4°) Faire au brouillon un petit tableau de valeurs puis tracer la courbe $\mathcal{C}$ avec soin sur le graphique ci-dessous. On n'oubliera pas de tracer la tangente horizontale.

On fait un petit tableau de valeurs.

Sur la deuxième ligne, on écrit des valeurs arrondies au dixième.

x	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	2,5	2,0	1,6	1	1,4	2,6

On place les points du tableau de valeurs.



On trace la tangente horizontale au point d'abscisse 1.

5°) Quel est le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2 ? On attend une justification succincte.

On calcule $f'(2) = 2 \times 2 - \dfrac{2}{2} = 3$.

Le coefficient directeur de T est égal à 3.

Le résultat se vérifie grâce au tracé de la tangente sur la calculatrice (affichage en bas du coefficient directeur).

6°) On considère la fonction Python d'en-tête `seuil(A)` qui prend pour argument un réel A et qui renvoie le plus petit entier naturel n supérieur ou égal à 1 tel que $f(n) \geqslant \mathrm{A}$.
Compléter les instructions manquantes dans l'encadré ci-contre.

Que renvoie la fonction pour $\mathrm{A} = 2022$?
Aucune explication n'est attendue.

```
from math import log

def f(x):
    y=x**2-2*log(x)
    return y

def seuil(A):
    n=1
    while f(n)<A:
          n=n+1
    return n
```

46

On a $f(46) = 2108{,}34271...$.

7°) Pour tout réel $a > 0$, on note M et N les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et $\dfrac{1}{a}$.
Que peut-on dire des coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}$ en M et en N ?

On note I le milieu de [MN].
Calculer les coordonnées de I en fonction de a.
En déduire que I appartient à une parabole Γ dont on donnera une équation.

On a $f'(a) = 2a - \dfrac{2}{a}$ et $f'\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{2}{a} - 2a$.

On constate donc que $f'\left(\dfrac{1}{a}\right) = -f'(a)$. Autrement dit, les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}$ en M et N sont opposés.

$$\mathrm{M}\left|\begin{array}{l} a \\ a^2 - 2\ln a \end{array}\right. \qquad \mathrm{N}\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{a^2} + 2\ln a \end{array}\right.$$

$$\mathrm{I}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x_{\mathrm{M}} + x_{\mathrm{N}}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right) \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y_{\mathrm{M}} + y_{\mathrm{N}}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right) \end{array}\right.$$

On a $y_{\mathrm{I}} = \dfrac{1}{2}\left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 - 2\right] = \dfrac{1}{2}\left[\left(2x_{\mathrm{I}}\right)^2 - 2\right] = 2{x_{\mathrm{I}}}^2 - 1$.

Le point I appartient donc à la parabole Γ d'équation $y = 2x - 1$.

On peut démontrer que $x_{\mathrm{I}} \geqslant 1$.

V.

Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

On peut faire une figure. On prend A, B, C, D non coplanaires c'est-à-dire qu'ils forment un tétraèdre.

1°) Démontrer que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$.

On a $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$ (relation de Chasles).

Comme I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$, on a $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{JC}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$.

2°) Soit M et N les points définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BC}$ où λ désigne un réel fixé.
Démontrer que $\overrightarrow{MN}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{DC}$.
Indication : On commencera par écrire $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$.
En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont coplanaires.

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$$

$$=-\lambda\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}$$

$$=-\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)+\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}$$

$$=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{BD}+\lambda\overrightarrow{BC}$$

$$=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{DC}$$

On peut écrire $\overrightarrow{MN}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{CD}$.

Cette dernière égalité fait apparaître le vecteur $\overrightarrow{MN}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont coplanaires.

3°) On note U le milieu de $[MN]$.
On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}$.
Démontrer que $\vec{u}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}$ puis que $\vec{u}=2\overrightarrow{IU}$.
Démontrer que $\vec{u}=\lambda\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.
En déduire, en utilisant le résultat établi à la question 1°), que $\overrightarrow{IU}=\lambda\overrightarrow{IJ}$.
On suppose que I et J ne sont pas confondus. Quel est l'ensemble des points U lorsque λ décrit $\mathbb{R}$?

$\vec{u} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}$

$= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IN}$

$= \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}$ (propriété du milieu)

$\vec{u} = \overrightarrow{IU} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IU} + \overrightarrow{IN}$

$= 2\overrightarrow{IU}$ car $\overrightarrow{UM} + \overrightarrow{UN} = \vec{0}$ (propriété du milieu)

$\vec{u} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}$

$= \lambda\overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{BC}$

$= \lambda\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$

D'après le résultat de la question 1°), on a $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Comme on a établi $\vec{u} = \lambda\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$, on peut écrire $\vec{u} = 2\lambda\overrightarrow{IJ}$.

Par ailleurs, on a établi que $\vec{u} = 2\overrightarrow{IU}$.

On peut donc écrire $2\overrightarrow{IU} = 2\lambda\overrightarrow{IJ}$ ce qui donne $\overrightarrow{IU} = \lambda\overrightarrow{IJ}$ (1).

Comme on suppose que I et J ne sont pas confondus, le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ n'est pas le vecteur nul. Les points I et J ne sont donc pas confondus et d'après (1), l'ensemble des points U lorsque λ décrit $\mathbb{R}$ est la droite (IJ).

Bonus à traiter la fin :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n{}^2 + 1}}$ pour tout entier naturel *n*.
Déterminer une expression de u_n en fonction de *n*.
Aucune méthode n'est imposée.

On peut commencer par calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 ….

$u_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$u_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{4}}$	$u_4 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$	$u_5 = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

On peut conjecturer que pour tout entier naturel *n* on a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

On va démontrer ce résultat par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

On sait que $u_0 = 1$ par définition de la suite.

Par ailleurs, on a $\dfrac{(-1)^0}{\sqrt{0+1}} = 1$.

On peut donc écrire $u_0 = \dfrac{(-1)^0}{\sqrt{0+1}}$ ce qui permet d'affirmer que $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+2}}$.

$$u_{k+1} = -\frac{u_k}{\sqrt{{u_k}^2+1}}$$

$$= -\frac{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)^2+1}}$$

$$= -\frac{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\frac{1}{k+1}+1}}$$

$$= -\frac{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}}$$

$$= -\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1} \times \sqrt{\frac{k+2}{k+1}}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{(k+1) \times \frac{k+2}{k+1}}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+2}}$$

On en déduit que la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.