T exp

Interrogation écrite du lundi 17 janvier 2022 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………

Note : ….. / 20

I. (6 points : 3 points + 3 points)

1°) Soit n un entier relatif tel que le reste de la division euclidienne de n par 5 soit égal à 2.
On note a le quotient de cette division euclidienne.
Vérifier au brouillon que l'on a $n^2 = 5\times\left(5a^2+4a\right)+4$.
Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de n^2 par 5 ?

……

……

2°) Soit m un entier relatif tel que le reste de la division euclidienne de m par 5 soit égal à 4.
On note b le quotient de cette division euclidienne.
En adaptant la méthode du 1°), déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de m^2 par 5.

……

……

……

II. (4 points : 1 point + 3 points)

On note A le produit de tous les entiers naturels impairs inférieurs ou égaux à 2021.

Compléter :

$$\mathrm{A} = \prod_{k=0}^{k=\ldots\ldots}\left(2k+1\right)$$

À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de chiffres de l'écriture en base dix de A.
Indication : Utiliser log A.

……

……

……

……

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $2-\mathrm{i}$ et $2\mathrm{i}$.

1°) Calculer la distance AB. ……………… (une seule égalité)

2°) Compléter la phrase suivante :

L'ensemble *E* des points M de *P*, d'affixe *z*, tels que $|2z|=4$ est ……………………………………………..……..

L'un des points A ou B appartient à *E*. Lequel ? …….

IV. (4 points : 2 points + 2 points)

On pose $z=x+\mathrm{i}$ et $z'=2\mathrm{i}x$ où *x* est un réel quelconque.
Calculer le module de *z* et de z' en fonction de *x*. Déterminer pour quelles valeurs de *x* il y a égalité.

……

……

……

……

……

……

V. (2 points : 1 point + 1 point)

On considère les fonctions Python `cdun(n)` et `prdp(n)` données dans les encadrés ci-dessous.
On précise qu'elles prennent pour argument un entier naturel *n* avec $n \geqslant 1$ pour la deuxième fonction.
Définir par une phrase ce que renvoie chacune de ces fonctions.

```
def cdun(n):
    x=n%10
    return x
```

```
def prdp(n):
    x=1
    for i in range(1,n+1):
        if n%i==0:
            x=x*i
    return x
```

Pour la deuxième fonction, on utilisera les mots « diviseurs positifs ».

……

……

Corrigé de l'interrogation écrite du 17-1-2022

I.

1°) Soit n un entier relatif tel que le reste de la division euclidienne de n par 5 soit égal à 2.
On note a le quotient de cette division euclidienne.
Vérifier au brouillon que l'on a $n^2 = 5 \times \left(5a^2 + 4a\right) + 4$.
Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de n^2 par 5 ?

Dans la division euclidienne de n^2 par 5, le quotient est $5a^2 + 4a$ et le reste est 4 (on vérifie que le reste est bien strictement inférieur au diviseur 5).

2°) Soit m un entier relatif tel que le reste de la division euclidienne de m par 5 soit égal à 4.
On note b le quotient de cette division euclidienne.
En adaptant la méthode du 1°), déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de m^2 par 5.

On a $m = 5b + 4$.

$$m^2 = \left(5b + 4\right)^2$$

$$= 25b^2 + 40b + 16$$

$$= 25b^2 + 40b + 15 + 1$$

$$= 5\left(5b^2 + 8b + 3\right) + 1$$

Dans la division euclidienne de m^2 par 5, le quotient est $5b^2 + 8b + 3$ et le reste est 1 (on vérifie que le reste est bien strictement inférieur au diviseur 5).

II.

On note A le produit de tous les entiers naturels impairs inférieurs ou égaux à 2021.

Compléter : $$\mathrm{A} = \prod_{k=0}^{k=1010} \left(2k + 1\right)$$

On a $2021 = 2 \times 1010 + 1$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de chiffres de l'écriture en base dix de A.
Indication : Utiliser log A.

On peut noter que A est un entier naturel impair car c'est un produit d'entiers naturels impairs.

$$\log A = \log\left(\prod_{k=0}^{k=1010}(2k+1)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=1010}\log(2k+1)$$ (utilisation de la propriété : le logarithme d’un produit est égal à la somme des logarithmes)

$= 2903,22...$ (utilisation de la calculatrice pour calculer la somme précédente)

On peut ne pas utiliser d’écritures symboliques :

$$A = 1\times 3\times 5\times ...\times 2021$$

$$\log A = \log(1\times 3\times 5\times ...\times 2021) = \log 1 + \log 3 + \log 5 + ... + \log 2021$$

$$E(\log A) + 1 = 2903 + 1 = 2904$$

L’écriture en base dix de A comporte 2904 chiffres.

Programmes Python :

Hugo Deschamps

```
def fac(n):
    if n==0:
       return 1
    else:
       x=1
       for i in range(1,n+1,2):
           x=x*i
       return x
print(fac(n))
print(len(str(fac(n))))
```

`print(fac(n))` permet d’afficher le produit de tous les entiers naturels impairs inférieurs ou égaux à *n*.
`print(len(str(fac(n))))` permet d’afficher le nombre de chiffres de l’écriture en base dix du produit de tous les entiers naturels impairs inférieurs ou égaux à *n*.

Vicente Seixas

```
u=1
for i in range(1,1011):
   u=u*(2*i+1)
print(len(str(u)))
```

III.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $2-\mathrm{i}$ et $2\mathrm{i}$.

1°) Calculer la distance AB. $\mathrm{AB}=\sqrt{13}$ (une seule égalité)

On commence par calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left(3\mathrm{i}-2\right)$ [formule $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}\right)$; $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}=2\mathrm{i}-\left(2-\mathrm{i}\right)=2\mathrm{i}-2+\mathrm{i}=3\mathrm{i}-2$]

$\mathrm{AB}^2=\left(-2\right)^2+3^2$

$=4+9$

$=13$

On en déduit que $\mathrm{AB}=\sqrt{13}$.

> On peut placer les points sur un graphique et contrôler le résultat en mesurant la longueur AB.

Variante :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left(3\mathrm{i}-2\right)$

$\mathrm{AB}=\sqrt{3^2+\left(-2\right)^2}$

$=\sqrt{9+4}$

$=\sqrt{13}$

$=\sqrt{13}$

On peut aussi appliquer directement la formule $\mathrm{AB}=\left|\,z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}\,\right|$.

2°) Compléter la phrase suivante :

L'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que $\left|\,2z\,\right|=4$ est le cercle de centre O et de rayon 2.

L'un des points A ou B appartient à E. Lequel ? B

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in E &\Leftrightarrow \left|\,2\,\right|\times\left|\,z\,\right|=4\\ &\Leftrightarrow 2\left|\,z\,\right|=4\\ &\Leftrightarrow \left|\,z\,\right|=2\\ &\Leftrightarrow \mathrm{OM}=2\end{aligned}$$

L'ensemble E est le cercle de centre O et de rayon 2.

On a $\text{OB} = |\, z_{\text{B}} \,| = |\, 2\text{i} \,| = |\, 2 \,| \times |\, \text{i} \,| = 2 \times 1 = 2$ d'où $\text{B} \in E$.

IV.

On pose $z = x + \text{i}$ et $z' = 2\text{i}x$ où x est un réel quelconque.
Calculer le module de z et de z' en fonction de x. Déterminer pour quelles valeurs de x il y a égalité.

$|\, z \,| = \sqrt{x^2 + 1}$ (on s'arrête là ; on ne peut pas aller plus loin)

$|\, z' \,| = \sqrt{(2x)^2} = |\, 2x \,| = |\, 2 \,| \times |\, x \,| = 2|\, x \,|$ ($|\, x \,|$ désigne la valeur absolue de x)

$\uparrow$

On utilise la propriété : « La racine carrée du carré d'un réel est égale à sa valeur absolue ».

On peut aussi écrire $|\, z' \,| = |\, 2\text{i}x \,| = |\, 2 \,| \times |\, \text{i} \,| \times |\, x \,| = 2 \times 1 \times |\, x \,| = 2|\, x \,|$ (on sait que le module de i est égal à 1).

On cherche les réels x tels que $|\, z \,| = |\, z' \,|$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2|\, x \,|$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^2 = \left(2|\, x \,|\right)^2$ (il y a bien équivalence car les deux membres sont positifs)

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (inutile d'arranger les deux valeurs obtenues)

V.

On considère les fonctions Python `cdun(n)` et `prdp(n)` données dans les encadrés ci-dessous.
On précise qu'elles prennent pour argument un entier naturel n avec $n \geqslant 1$ pour la deuxième fonction.
Définir par une phrase ce que renvoie chacune de ces fonctions.

```
def cdun(n):
    x=n%10
    return x
```

Pour la deuxième fonction, on utilisera les mots « diviseurs positifs ».

```
def prdp(n):
    x=1
    for i in range(1,n+1):
        if n%i==0:
           x=x*i
    return x
```

La fonction `cdun(n)` renvoie le reste de la division euclidienne de n par 10 qui est aussi égal au chiffre des unités de la fonction (d'où le nom de la fonction !).

La fonction `prdp(n)` renvoie le produit de tous les diviseurs positifs de n (d'où le nom de la fonction !).