T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 14 janvier 2022

Durée : 40 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….………………………………..

Note : ….. / 20

I. (2 points) Question de cours

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

Recopier et compléter sur les pointillés tout à fait à droite l'égalité : $\overrightarrow{IJ} = \ldots$ ……………

II. (2 points)

Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace.

Simplifier les vecteurs suivants : $\vec{u} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$.

Écrire deux égalités et justifier sur les lignes ci-dessous. ………….. …………..

Ces vecteurs sont-ils colinéaires au vecteur $\overrightarrow{AB}$?

………..

………..

III. (9 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points ; 5°) 1 point ; 6°) 1 point)

On considère un pavé droit ABCDEFGH. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CG]$.

On commencera par faire une figure soignée au brouillon.

1°) Compléter : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \ldots\ldots$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = \ldots\ldots$ $\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{FB} = \ldots\ldots$

2°) Simplifier le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GF}$.

………..

3°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

Indication : On pourra par exemple écrire $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$.

………..

4°) On admet que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Justifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.

Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{IJ}$?

Quelle est la position de la droite (IJ) par rapport au plan (ADF) ?

………..

………..

………..

………..

5°) On note Δ la droite qui passe par D et qui admet le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ pour vecteur directeur.
Entourer le(s) point(s) appartenant à Δ :

A B C D I J

6°) Vrai ou faux ? Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BJ}$ sont coplanaires. …….

IV. (5 points : 3 points + 2 points)

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note A l'événement « Le voyageur fait sonner le portique » et B l'événement « Le voyageur porte un objet métallique ». On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.
On admet que :
• Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
• Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.
Faire un arbre de probabilités au brouillon.
On note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
Calculer $P(\text{A})$ (valeur exacte du résultat sous forme décimale) et $P(\text{B}/\text{A})$ (valeur arrondie au millième).

……………………. …………………….

Sur les lignes ci-dessous, présenter les calculs qui conduisent aux résultats. Aucune rédaction n'est demandée.

………………………………………………………..	………………………………………………………..
………………………………………………………..	………………………………………………………..
………………………………………………………..	………………………………………………………..
………………………………………………………..	………………………………………………………..
………………………………………………………..	………………………………………………………..

V. (2 points)

```
def seuil(a):
    u=5
    n=0
    while ……….. :
        u=1-2*u
        n=n+1
    return n
```

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - 2u_n$ pour tout entier naturel n.
La fonction Python d'en-tête `def seuil(a):` donnée dans l'encadré ci-contre prend pour argument un réel a et a pour objectif de renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant a$.
Quelle condition faut-il écrire après le `while` de la quatrième ligne ?
On donne quatre propositions. Entourer celle qui convient.

`u<a` `u<=a` `u>a` `u>=a`

Corrigé de l'interrogation écrite du 14-1-2022

I.

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

Recopier et compléter sur les pointillés tout à fait à droite l'égalité : $\overrightarrow{IJ} = \ldots\ldots$ $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Cette égalité se « voit » sur une petite figure.
Elle est en lien avec la configuration des milieux de deux côtés dans un triangle.

II.

Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace.
Simplifier les vecteurs suivants : $\vec{u} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$.
Écrire deux égalités et justifier sur les lignes ci-dessous. $\vec{u} = 2\overrightarrow{BA}$ $\vec{v} = \vec{0}$
Ces vecteurs sont-ils colinéaires au vecteur $\overrightarrow{AB}$?

$\vec{u} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}$ (on commence par transformer $\vec{u}$ en somme de vecteurs)
$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA}$ (on déplace les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BD}$ de manière à « faire » une relation de Chasles)
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$ (relation de Chasles)
$= 2\overrightarrow{BA}$

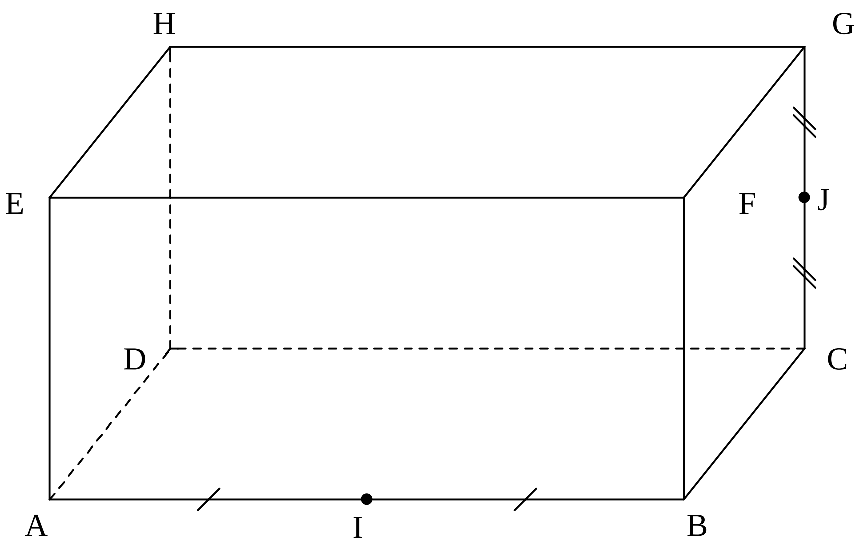
$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}$
$= \vec{0}$

$\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ car $\vec{u} = -2\overrightarrow{AB}$.

$\vec{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ car $\vec{v}$ est le vecteur nul et le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs de l'espace (on peut aussi écrire $\vec{v} = 0\overrightarrow{AB}$).

III.

On considère un pavé droit ABCDEFGH. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CG]$.
On commencera par faire une figure soignée au brouillon.



1°) Compléter : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AG}$ $\qquad$ $\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FD}$

Il s'agit de la règle du parallélogramme que l'on applique dans différents parallélogrammes (qui sont en fait des rectangles car ABCDEFGH est un pavé droit).

2°) Simplifier le vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GF}$.

$\vec{u}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{HB}$

3°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.
Indication : On pourra par exemple écrire $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$.

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ (on utilise l'égalité $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ car J est le milieu de $[CG]$).

4°) On admet que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Justifier que $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.
Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{IJ}$?
Quelle est la position de la droite (IJ) par rapport au plan (ADF) ?

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\\&=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\\&=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)\\&=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}\end{aligned}$$

On utilise l'égalité $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$ que l'on peut écrire car ABFE est un parallélogramme.

D'après l'égalité obtenue, le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires donc $\left(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}\right)$ est un repère du plan (ADF).

Par propriété du cours, la droite (IJ) est parallèle au plan (ADF).

On utilise la propriété suivante de caractérisation du parallélisme d'une droite et d'un plan.

> Soit P un plan de repère $\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$ et D une droite de repère $\left(B, \vec{w}\right)$.
> D est parallèle à P si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires c'est-à-dire si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.

5°) On note Δ la droite qui passe par D et qui admet le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ pour vecteur directeur.
Entourer le(s) point(s) appartenant à Δ :

A B C D I J

Les points qui appartiennent à Δ sont D et I.

C'est évident pour le point D puisque Δ passe par D par hypothèse.

Pour le point I, on utilise l'égalité $\vec{v} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$.

On sait que I est le milieu de $[AB]$ donc, par une petite propriété du cours (propriété qui dit que pour tout point M de l'espace $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$), on peut écrire $\vec{v} = 2\overrightarrow{DI}$.
On peut aussi écrire $\vec{v} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IB} = ... = 2\overrightarrow{DI}$.
On peut donc écrire $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\vec{v}$.
Cette dernière égalité montre que $\overrightarrow{DI}$ est colinéaire à $\vec{v}$ ce qui permet d'affirmer que $I \in \Delta$.

6°) Vrai ou faux ? Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BJ}$ sont coplanaires. Vrai

1$^{\text{ère}}$ méthode :
On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BJ}$ admettent des représentants définis par des points d'un même plan. On en déduit qu'ils sont coplanaires.

2$^{\text{e}}$ méthode :
On a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ car ABCDEFGH est un cube.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BJ} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} \quad \text{(relation de Chasles)}\\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}\\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ peut donc s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BJ}$ sont coplanaires.

IV.
Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note A l'événement « Le voyageur fait sonner le portique » et B l'événement « Le voyageur porte un objet métallique ». On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.
On admet que :
• Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
• Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.
Faire un arbre de probabilités au brouillon.
On note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
Calculer $P(A)$ (valeur exacte du résultat sous forme décimale) et $P(B/A)$ (valeur arrondie au millième).

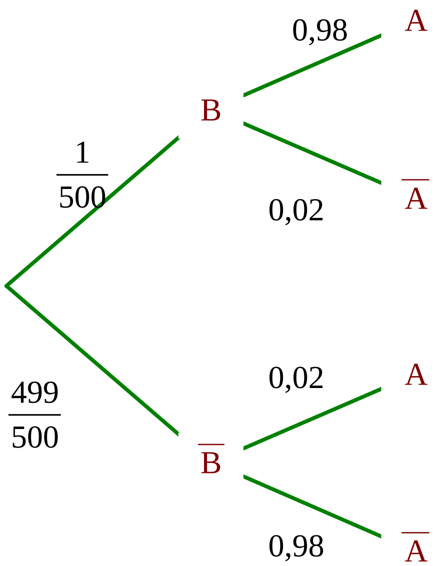
0,02192 0,089

Sur les lignes ci-dessous, présenter les calculs qui conduisent aux résultats. Aucune rédaction n'est demandée.

On commence par faire un arbre de probabilités.

Les probabilités du premier niveau sont des probabilités simples.

Les probabilités du deuxième niveau sont des probabilités conditionnelles.



On sait que B et $\overline{B}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(B \cap A) + P(\overline{B} \cap A)$$

$$= P(B) \times P(A / B) + P(\overline{B}) \times P(A / \overline{B})$$

$$= \frac{1}{500} \times 0,98 + 0,02 \times \frac{499}{500}$$

$$= 0,02192$$

On applique la formule de définition d'une probabilité conditionnelle.

On cherche la probabilité conditionnelle de B sachant A.

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B) \times P(A / B)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{1}{500} \times 0,98}{0,02192}$$

$$= 0,0894160...$$

La valeur arrondie au millième de $P(B / A)$ est 0,089.

Si on travaille en écriture fractionnaire (ce qui est déconseillé), on obtient $P(A) = \frac{49}{25000} + \frac{499}{25000} = ... = \frac{137}{6250}$ et $P(B / A) = \frac{49}{548}$.

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - 2u_n$ pour tout entier naturel *n*.
La fonction Python d'en-tête `def seuil(a):` donnée dans l'encadré ci-contre prend pour argument un réel *a* et a pour objectif de renvoyer le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n \leqslant a$.
Quelle condition faut-il écrire après le `while` de la quatrième ligne ?
On donne quatre propositions. Entourer celle qui convient.

```
def seuil(a):
    u=5
    n=0
    while .......... :
          u=1-2*u
          n=n+1
    return n
```

`u<a` `u<=a` `u>a` `u>=a`

La condition qui convient est `u>a`.

En effet, la négation de l'inégalité $u_n \leqslant a$ est $u_n > a$.

La boucle ne s'arrête pas tant que $u > a$.

On peut programmer le programme sur la calculatrice.

On peut faire tourner « à la main » le programme pour des valeurs de *a*. Par exemple, pour $a = -20$, on obtient 3 pour valeur de *n* $(u_3 = -37)$.

Un méthode qui permet de bien comprendre est d'utiliser un tableau d'évolution des variables *u* et *n*.

Étape	0	1	2	3	4
Condition $u > -20$		vraie	vraie	vraie	fausse
Valeur de *u*	5	$1-2\times5=-9$	$1-2\times(-9)=19$	$1-2\times19=-37$	
Valeur de *n*	0	1	2	3	

Le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n \leqslant -20$ est 3.

On peut démontrer que pour tout entier *n*, on a $u_n = \dfrac{14\times(-2)^n+1}{3}$.

On en déduit que (u_n) n'est pas bornée.