T exp

Interrogation écrite du lundi 10 janvier 2022 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 2 points + 2 points)

• Écrire l'égalité de la division euclidienne de 2022 par 5 : ……………………………………………

• Écrire l'égalité de la division euclidienne de – 2022 par 5 : ……………………………………………

II. (2 points)

On note A le produit de tous les entiers naturels impairs inférieurs ou égaux à 2021.
Quel est le chiffre des unités de l'écriture en base dix de A ? On ne demande pas de justifier.

On rappelle que le produit de plusieurs nombres impairs est impair.

…. (un seul résultat sans égalité)

III. (3 points)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On prélève au hasard et avec remise deux boules de l'urne.
On note $\Omega = [\![1\,;n]\!]^2$ l'univers des possibles de l'expérience aléatoire et P la probabilité uniforme sur Ω.
On note A l'événement : « Le produit des numéros des deux boules est égal à n ».

On suppose que n est un nombre premier. Calculer $P(\mathrm{A})$.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

Bonus sur 1 point. On suppose que n n'est pas un nombre premier. Démontrer que $P(\mathrm{A}) \geqslant \dfrac{3}{n^2}$.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit n un entier relatif tel que le reste de la division euclidienne de n par 33 soit égal à 24.
On note q le quotient de cette division euclidienne.

1°) Écrire ci-contre une égalité vérifiée par n et q. ……………………………………..

2°) L'affirmation « n est divisible par 3 » est-elle vraie ou fausse ? Justifier. ……

……

3°) Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de n par 11.

……

……

V. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

On pose $z = a^2 - b^2 + 2\text{i}ab$ où a et b sont deux nombres réels.

1°) Démontrer que $|\, z \,| = a^2 + b^2$.

……

……

……

……

……

2°) Justifier que $z = u^2$ où u est le nombre complexe $u = a + \text{i}b$. Retrouver alors le résultat du 1°) en utilisant une propriété du module d'un nombre complexe.

……

……

……

Corrigé de l'interrogation écrite du 10-1-2022

I.

• Écrire l'égalité de la division euclidienne de 2022 par 5 : $2022 = 5 \times 404 + 2$

• Écrire l'égalité de la division euclidienne de – 2022 par 5 : $-2022 = 5 \times (-405) + 3$

On vérifie directement les résultats avec la calculatrice.

II.

On note A le produit de tous les entiers naturels impairs inférieurs ou égaux à 2021.
Quel est le chiffre des unités de l'écriture en base dix de A ? On ne demande pas de justifier.

On rappelle que le produit de plusieurs nombres impairs est impair.

5 (un seul résultat sans égalité)

Soit B le produit de tous les entiers naturels impairs inférieurs ou égaux à 2021 sauf 5.

On a $\text{A} = 5\text{B}$.

On peut dire que B est impair comme produit d'entiers naturels impairs.

De plus, le chiffre des unités de l'écriture en base dix du produit d'un nombre impair par 5 est égal à 5 (cf. interrogation du 13-12-2021).

Donc le chiffre des unités de l'écriture en base dix de A est 5.

On peut essayer de calculer A sur calculatrice ne utilisant la fonction permettant de calculer un produit (après avoir écrit $\text{A} = \prod_{k=0}^{k=1010} (2k+1)$).

On s'aperçoit cependant que l'on dépasse les capacités de la calculatrice.
Elle ne peut pas afficher de résultat.

On peut écrire une fonction Python qui calcule A.

```
def prod() :
      L=[i in range(1,2022) if n%2!=0]
      p=1
      for i in L:
          p=p*i
      return p
```

On obtient l'écriture complète en base dix de A.

On vérifie que le chiffre des unités de A est bien 5.

III.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On prélève au hasard et avec remise deux boules de l'urne.
On note $\Omega = [\![1\,;n]\!]^2$ l'univers des possibles de l'expérience aléatoire et P la probabilité uniforme sur Ω.
On note A l'événement : « Le produit des numéros des deux boules est égal à n ».

On suppose que n est un nombre premier. Calculer $P(\text{A})$.

Une manière de modéliser l'expérience aléatoire consiste à utiliser un tableau à double entrée ou un arbre.

Comme n est un nombre premier, les seuls tirages possibles pour A sont $(1\,;n)$ et $(n\,;1)$.

On a donc $\text{card}\,\Omega = n^2$ et $\text{card}\,\text{A} = 2$.

Comme P est la loi de probabilité uniforme sur Ω, on a $P(\text{A}) = \dfrac{\text{card}\,\text{A}}{\text{card}\,\Omega} = \dfrac{2}{n^2}$.

Une autre méthode consiste à utiliser le principe multiplicatif car on a une expérience aléatoire répétée deux fois dans des conditions identiques indépendantes.
Dans ce cas, le calcul s'effectue ainsi :

$$\begin{aligned} P(\text{A}) &= \frac{1}{n}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

Bonus : On suppose que n n'est pas un nombre premier. Démontrer que $P(\text{A}) \geqslant \dfrac{3}{n^2}$.

Comme n n'est pas un nombre premier, il existe deux entiers naturels p et q différents de 1 et n tels que $n = pq$.
Il existe donc au moins trois tirages possibles pour A : $(1\,;n)$, $(n\,;1)$, $(p\,;q)$.

On a donc $\text{card}\,\text{A} \geqslant 3$ d'où $P(\text{A}) \geqslant \dfrac{3}{n^2}$.

On remarquera que p et q peuvent être égaux. Par exemple, dans le cas de 25, on a le couple $(5\,;5)$.
C'est la raison pour laquelle on ne peut rajouter le couple $(q\,;p)$.

Mieux :

Soit n un entier naturel quelconque.
Soit k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

On suppose que k est un nombre premier.
Calculer $P(\text{X} = k)$.

On suppose que k n'est pas un nombre premier.
Calculer $P(\text{X} = k+1)$.

IV.

Soit n un entier relatif tel que le reste de la division euclidienne de n par 33 soit égal à 24.
On note q le quotient de cette division euclidienne.

1°) Écrire ci-contre une égalité vérifiée par n et q. $n=33q+24$

2°) L'affirmation « n est divisible par 3 » est-elle vraie ou fausse ? Justifier. vraie

1ère méthode :
On peut écrire $n=3(11q+8)$.
Comme q est un entier relatif, $11q+8$ est aussi un entier relatif.
On en déduit que n est divisible par 3.

2e méthode :
33 est un multiple de 3 donc 33q est aussi un multiple de 3.
24 est un multiple de 3.

La somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3 donc n est un multiple de 3.

On évite d'écrire $\frac{n}{3}$.

3°) Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de n par 11.

On peut écrire $n=11\times 3q+11\times 2+2$ soit $n=11\times(3q+2)+2 \quad (1)$.

Comme q est un entier relatif, $3q+2$ est aussi un entier relatif.

(1) traduit l'égalité de la division euclidienne de n par 11.
Le quotient est $3q+2$ et le reste est 2.

On vérifie que le reste est bien strictement inférieur au diviseur.

V.

On pose $z=a^2-b^2+2\mathrm{i}ab$ où a et b sont deux nombres réels.

1°) Démontrer que $|\,z\,|=a^2+b^2$.

On applique la définition du module d'un nombre complexe.

On calcule le module au carré (plus commode que d'avoir de grands radicaux).

$$\begin{aligned}|\,z\,|^2&=\left(a^2-b^2\right)^2+(2ab)^2\\&=a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2\\&=a^4+2a^2b^2+b^4\\&=\left(a^2+b^2\right)^2\end{aligned}$$

Comme $a^2+b^2\geqslant 0$, on en déduit que $|\,z\,|=a^2+b^2$.

2°) Justifier que $z = u^2$ où u est le nombre complexe $u = a + \mathrm{i}b$. Retrouver alors le résultat du 1°) en utilisant une propriété du module d'un nombre complexe.

On a $z = a^2 + 2\mathrm{i}ab + (\mathrm{i}b)^2$ d'où $z = (a + \mathrm{i}b)^2$.

Or $u = a + \mathrm{i}b$. Donc $z = u^2$.

On sait que si deux nombres complexes sont égaux, alors ils ont le même module (propriété du cours).

On a donc $|\, z \,| = |\, u^2 \,|$.

D'après la propriété sur le module d'une puissance, on a $|\, u^2 \,| = |\, u \,|^2$.

Or $|\, u \,|^2 = a^2 + b^2$.

On en déduit que $|\, z \,| = a^2 + b^2$.