T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 7 janvier 2022

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : …………………..……………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 3. On note S la sphère de centre F et de rayon x où x est un réel strictement supérieur à 3 et P le plan qui contient les points A, B, C, D.

1°) Compléter la phrase suivante :

L'intersection de S et du plan P est le cercle de centre …. et de rayon ……..…. .

2°) Déterminer x pour que l'intersection de S et de P soit un cercle de rayon 2.

…… (une seule valeur sans égalité)

II. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - 2u_n$ pour tout entier naturel n.
La fonction Python d'en-tête `def terme(n):` dans l'encadré ci-contre prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et a pour objectif de renvoyer la valeur de u_n.
Compléter les instructions manquantes en utilisant une variable `u`.

```
def terme(n):

    …………..

    for i in range(1,n+1):

        …………….

    return ……
```

III. (5 points : 1 point par résultat)

On s'intéresse à un portique de sécurité dans un aéroport.
On suppose que pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,025.
80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique de sécurité parmi ces 80 personnes.

● Compléter la phrase suivante :

X suit la loi …………………… de paramètres …….. (nombre de répétitions) et ……. (probabilité qu'une personne fasse sonner le portique de sécurité).

● Calculer la probabilité qu'il y ait :

au moins une personne qui fasse sonner l'alarme …………. (un seul résultat, arrondi au millième)

au plus six personnes qui fassent sonner l'alarme …………. (un seul résultat, arrondi au millième)

au moins deux personnes qui fassent sonner l'alarme …………. (un seul résultat, arrondi au millième)

● L'espérance mathématique de X est égale à …………… (valeur exacte, sans égalité).

● La variance de X est égale à …………… (valeur exacte, sans égalité).

IV. (5 points : 3 points + 2 points)

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires. On suppose que les cinq boules sont indiscernables au toucher.
On tire successivement au hasard deux boules de l'urne avec remise (on remet dans l'urne la première boule tirée).
On considère le jeu suivant :
- si on tire deux boules blanches, on gagne 5 euros ;
- si on tire une boule blanche puis une noire, on gagne 2 euros ;
- si on tire une boule noire puis une blanche, on perd 1 euro ;
- si on tire deux boules noires, on perd 5 euros.

On considère la variable aléatoire X donnant le gain algébrique en euros d'un joueur. X peut donc prendre les valeurs $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -5$.
Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X (où P désigne la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire).

x_i	
$P(\mathrm{X} = x_i)$	

Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

…………………… (une seule égalité) …………………… (une seule égalité)

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, n étant un entier naturel non nul.
On tire au hasard et avec remise deux boules de cette urne et on note X le produit des numéros des deux boules.
On écrira les résultats sans égalités.

1°) Dans cette question, on suppose que $n = 6$. Quelle est la probabilité de l'événement $(\mathrm{X} = 6)$?
On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible. ……

2°) On revient au cas général où n est un entier naturel quelconque non nul.
Quelle est la probabilité de l'événement $(\mathrm{X} = n^2)$? ……

Bonus sur 1 point : L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier sur les deux lignes en dessous.
« Pour $n \geqslant 2$, la probabilité de l'événement $(\mathrm{X} = n)$ est supérieure ou égale à $\dfrac{2}{n^2}$. » ……

………..

………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 7-1-2022

I.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 3. On note S la sphère de centre F et de rayon x où x est un réel strictement supérieur à 3 et P le plan qui contient les points A, B, C, D.

On commence par faire une figure.

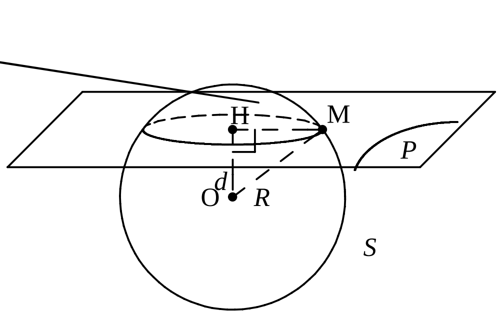
1°) Compléter la phrase suivante :

L'intersection de S et du plan P est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{x^2-9}$.

On utilise la propriété suivante :

Soit S une sphère de centre O et de rayon R $(R>0)$.
Soit P un plan de l'espace.
On pose $d = \mathrm{d}(\mathrm{O}, P)$.

Si $d<R$, alors S et P sont sécants suivant le cercle $\mathcal{C}$ de centre H, projeté orthogonal de O sur P, et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$ (théorème de Pythagore).



Le projeté orthogonal de F sur le plan P est le point B.

On a donc $\mathrm{d}(\mathrm{F}, P) = \mathrm{FB} = 3$ (car on suppose que les arêtes du cube ont pour longueur 3).

Or le rayon de S est x et on a supposé que $x>3$.

La distance de F au plan P est strictement inférieure au rayon de S.

D'après la propriété, l'intersection de S et du plan P est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{x^2-9}$.

2°) Déterminer x pour que l'intersection de S et de P soit un cercle de rayon 2.

$\sqrt{13}$ (une seule valeur sans égalité)

On cherche $x>3$ tel que $\sqrt{x^2-9}=2$ (1).

$(1) \Leftrightarrow x^2-9=4$

$\Leftrightarrow x^2=13$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{13}$ ou $x=-\sqrt{13}$

On ne retient que $\sqrt{13}$ comme solution car $x>3$.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=5$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=1-2u_n$ pour tout entier naturel *n*.
La fonction Python d'en-tête `def terme(n):` dans l'encadré ci-contre prend pour argument un entier naturel $n\geqslant 1$ et a pour objectif de renvoyer la valeur de u_n.
Compléter les instructions manquantes en utilisant une variable `u`.

```
def terme(n):

    u=5

    for i in range(1,n+1):

        u=1-2*u

    return u
```

III.

On s'intéresse à un portique de sécurité dans un aéroport.
On suppose que pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,025.
80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique de sécurité parmi ces 80 personnes.

● Compléter la phrase suivante :

X suit la loi binomiale de paramètres 80 (nombre de répétitions) et 0,025 (probabilité qu'une personne fasse sonner le portique de sécurité).

● Calculer la probabilité qu'il y ait :

au moins une personne qui fasse sonner l'alarme 0,868 (un seul résultat, arrondi au millième)

au plus six personnes qui fassent sonner l'alarme 0,996 (un seul résultat, arrondi au millième)

au moins deux personnes qui fassent sonner l'alarme 0,597 (un seul résultat, arrondi au millième)

● L'espérance mathématique de X est égale à 2 (valeur exacte, sans égalité).

● La variance de X est égale à 1,95 (valeur exacte, sans égalité).

● Pour calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne qui fasse sonner l'alarme, on calcule $P(\mathrm{X}\geqslant 1)$.
On peut utiliser directement la calculatrice ou écrire $P(\mathrm{X}\geqslant 1)=1-P(\mathrm{X}=0)=1-0{,}975^{80}$.
Dans ce dernier cas, on utilise l'événement contraire « aucune personne ne fait sonner l'alarme ».
La probabilité qu'une personne ne fasse pas sonner l'alarme est $1-0{,}025=0{,}975$.

● Pour calculer la probabilité qu'il y ait au plus six personnes qui fassent sonner l'alarme, on calcule $P(\mathrm{X}\leqslant 6)$.
On peut faire les calculs à la main ($P(\mathrm{X}\leqslant 6)=P(\mathrm{X}=0)+P(\mathrm{X}=1)+P(\mathrm{X}=2)+...+P(\mathrm{X}=6)$) ou utiliser directement la calculatrice.

● Pour calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes qui fassent sonner l'alarme, on calcule $P(\mathrm{X}\geqslant 2)$.
On peut utiliser directement la calculatrice.

● Pour l’espérance mathématique et la variance de X, on utilise les formules du cours donnant l’espérance mathématique et la variance d’une variable aléatoire qui suit la loi binomiale.

IV.

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires. On suppose que les cinq boules sont indiscernables au toucher.
On tire successivement au hasard deux boules de l’urne avec remise (on remet dans l’urne la première boule tirée).
On considère le jeu suivant :
- si on tire deux boules blanches, on gagne 5 euros ;
- si on tire une boule blanche puis une noire, on gagne 2 euros ;
- si on tire une boule noire puis une blanche, on perd 1 euro ;
- si on tire deux boules noires, on perd 5 euros.

On considère la variable aléatoire X donnant le gain algébrique en euros d’un joueur. X peut donc prendre les valeurs $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -5$.
Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X (où P désigne la probabilité qui modélise l’expérience aléatoire).

x_i	5	2	-1	-5
$P(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$

On peut utiliser un petit arbre de probabilités.

Calculer l’espérance mathématique et la variance de X.

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = -0,76$ (une seule égalité) $\qquad$ $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 13,6224$ (une seule égalité)

Pour calculer la variance, on peut utiliser soit la formule de définition soit la formule de König-Huygens.

La deuxième méthode est préférable.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 5 \times \frac{4}{25} + 2 \times \frac{6}{25} + (-1) \times \frac{6}{25} + (-5) \times \frac{9}{25}$$

$$= -\frac{19}{25}$$

$$= -0,76$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - [\mathrm{E}(\mathrm{X})]^2 \quad \text{(formule de König-Huygens)}$$

$$= 5^2 \times \frac{4}{25} + 2^2 \times \frac{6}{25} + (-1)^2 \times \frac{6}{25} + (-5)^2 \times \frac{9}{25} - \left(-\frac{19}{25}\right)^2$$

$$= 13,6224$$

On notera que X ne suit pas une loi binomiale donc on ne peut pas utiliser les formules donnant l’espérance mathématique et la variance d’une variable aléatoire qui suit la loi binomiale.
On effectue les calculs directement. Il n’y a pas d’autre possibilité.

On vérifie en utilisant le menu « statistiques » de la calculatrice.

V.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, n étant un entier naturel non nul.
On tire au hasard et avec remise deux boules de cette urne et on note X le produit des numéros des deux boules.
On écrira les résultats sans égalités.

1°) Dans cette question, on suppose que $n=6$. Quelle est la probabilité de l'événement $(\mathrm{X}=6)$?

On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible. $\dfrac{1}{9}$

L'événement $(\mathrm{X}=6)$ se traduit par « Le produit des deux numéros est égal à 6 ».
Il y a 4 résultats qui correspondent à cet événement : les résultats $(1\,;6)$, $(6\,;1)$, $(2\,;3)$, $(3\,;2)$.

On applique le principe multiplicatif car les deux tirages sont deux expériences aléatoires indépendantes.

$$\begin{aligned}P(\mathrm{X}=6)&=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\\&=4\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\\&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

Autre méthode :
Chaque résultat a pour probabilité $\dfrac{1}{36}$. On peut alors écrire directement $P(\mathrm{X}=6)=4\times\dfrac{1}{36}$.

2°) On revient au cas général où n est un entier naturel quelconque non nul.

Quelle est la probabilité de l'événement $(\mathrm{X}=n^2)$? $\dfrac{1}{n^2}$

L'événement $(\mathrm{X}=n^2)$ se traduit par « Le produit des deux numéros est égal à n^2 ».
Il y a un seul résultat qui réalise cet événement : le résultat $(n\,;n)$.
On applique le principe multiplicatif car les deux tirages sont des expériences aléatoires indépendantes.

$$P(\mathrm{X}=n^2)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}$$

Bonus : L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier sur les deux lignes en dessous.
« Pour $n\geqslant 2$, la probabilité de l'événement $(\mathrm{X}=n)$ est supérieure ou égale à $\dfrac{2}{n^2}$. » V

Il y a au moins deux résultats qui réalisent $(\mathrm{X}=n)$: les résultats $(1\,;n)$ et $(n\,;1)$.

La probabilité de chacun de ces deux résultats est $\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n^2}$.

On a $P(\mathrm{X}=n)\geqslant\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}$, soit $P(\mathrm{X}=n)\geqslant\dfrac{2}{n^2}$.

Remarque : Si n est un nombre premier, on a $P\left(\mathrm{X}=n\right)=\dfrac{2}{n^2}$.