T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 17 décembre 2021

Durée : 20 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………..……………………………….

Note : ….. / 20

I. (2 points)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $u_n \leqslant 1-\ln n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

II. (2 points)

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont différents de – 1. Pour tout entier naturel *n*, on pose

$v_n = \dfrac{u_n}{(u_n+1)^2}$.

On suppose que (u_n) converge vers – 1 (autrement dit $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$).

Compléter : $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{}$ ………

III. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point) Questions de cours

1°) Compléter les implications suivantes où D et D' sont deux droites de l'espace et P un plan de l'espace :

① $D \perp P$ et $D' \perp P \Rightarrow$ …………… ② $D \,//\, P$ et $D' \perp P \Rightarrow$ …………… ③ $D \perp P$ et $D' \subset P \Rightarrow$ ……………

2°) Soit A et B deux points distincts de l'espace.
On note P le plan médiateur de $[\text{AB}]$ et S la sphère de diamètre $[\text{AB}]$.

● Compléter par une égalité l'équivalence suivante où M est un point quelconque de l'espace.

$$\text{M} \in P \Leftrightarrow \text{………………..}$$

● Soit M un point quelconque de S distinct de A et B. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{\text{AMB}}$? Répondre par une phrase.

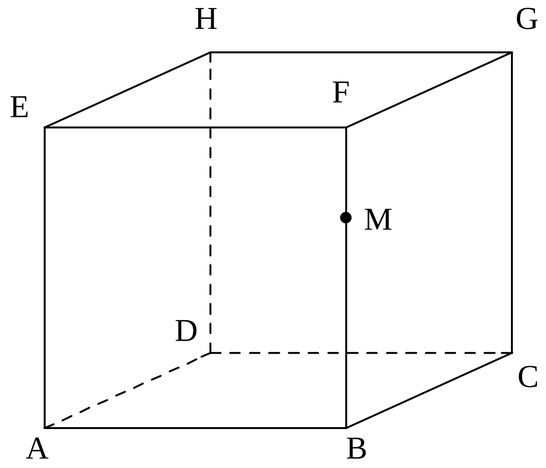
……………………………………………………………………………………..

Numéro : …..

Prénom et nom : …………………….…………………………………

IV. (11 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 5 points ; 5°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point)

Soit ABCDEFGH un cube. On note O le centre de la face ABCD.
Soit M un point quelconque du segment $[\mathrm{BF}]$.
Compléter la figure en marquant le point O.
On n'écrira rien d'autre sur la figure.



1°) Quel est le projeté orthogonal de M sur la droite (GH) ? …..

2°) Que représente le plan (BDF) pour le segment $[\mathrm{AC}]$?

Le plan (BDF) est ………………………………………………………

3°) Quel est le projeté orthogonal de M sur la droite (AC) ? …..

4°) Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
Écrire uniquement les lettres V (pour vrai) et F (pour faux) sur les pointillés.

• Les droites (AF) et (CH) sont orthogonales. ….

• Le point M est équidistant des points A et C. ….

• Les droites (OE) et (AC) sont perpendiculaires. ….

• Les droites (FD) et (BH) sont perpendiculaires. ….

• Les droites (EM) et (AD) sont orthogonales. ….

5°) On suppose que les arêtes du cube ont pour longueur 3 cm.
a) On pose $\mathrm{BM} = x$ cm (x est un réel de l'intervalle $[0\,;3]$).
Exprimer le volume V du tétraèdre MABC en fonction de x. ……..………………. (une seule égalité)

b) On note S la sphère de centre F et de rayon 4 cm. Compléter la phrase suivante :

L'intersection de S et du plan (ABC) est le cercle de centre …. et de rayon …… .

c) Compléter l'égalité : $\mathrm{DM} =$ .... (résultat en fonction de x).

V. (1 point)

Soit ABCDEFGH un pavé droit. On pose $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{AD} = b$, $\mathrm{AE} = c$ où a, b, c sont de réels strictement positifs.
Exprimer en fonction de a, b, c l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle ABGH.

……………………………………… (une seule égalité)

Corrigé de l'interrogation écrite du 17-12-2021

I.

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $u_n \leqslant 1-\ln n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$ (provient de la limite de la fonction logarithme népérien en $+\infty$).

Les propriétés sur les limites de suites donnent $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\ln n) = -\infty$ (produit par – 1) puis $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-\ln n) = -\infty$ (ajout de 1).

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant 1-\ln n$, le théorème de limite par comparaison permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

II.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont différents de – 1. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{(u_n+1)^2}$.

On suppose que (u_n) converge vers – 1 (autrement dit $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$).

Compléter : $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$

On sait que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$ donc on a $u_n + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Par opération algébrique, on a $(u_n+1)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0^+$ (+ car on a un carré qui est positif ou nul ; sans le carré, on peut juste mettre 0).

Par limite d'un quotient, $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

III. Questions de cours

1°) Compléter les implications suivantes où D et D' sont deux droites de l'espace et P un plan de l'espace :

① $D \perp P$ et $D' \perp P \Rightarrow D \,//\, D'$ ② $D \,//\, P$ et $D' \perp P \Rightarrow D \perp D'$ ③ $D \perp P$ et $D' \subset P \Rightarrow D \perp D'$

Conseil : Faire des petites figures.

2°) Soit A et B deux points distincts de l'espace.
On note *P* le plan médiateur de $[AB]$ et *S* la sphère de diamètre $[AB]$.

• Compléter par une égalité l'équivalence suivante où M est un point quelconque de l'espace.

$$\mathrm{M} \in P \Leftrightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{MB}$$

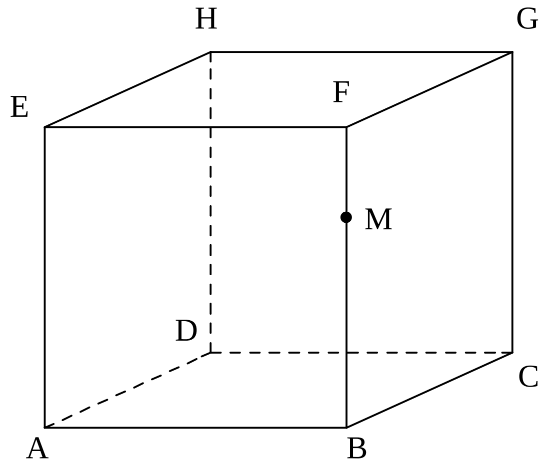
• Soit M un point quelconque de *S* distinct de A et B. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{\mathrm{AMB}}$? Répondre par une phrase.

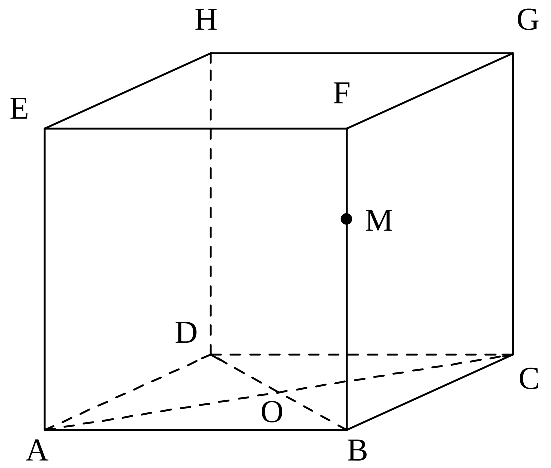
L'angle $\widehat{\mathrm{AMB}}$ est droit.

Il s’agit de la propriété angulaire pour une sphère de diamètre donné.

IV.

Soit ABCDEFGH un cube. On note O le centre de la face ABCD.
Soit M un point quelconque du segment $[BF]$.
Compléter la figure en marquant le point O.
On n’écrira rien d’autre sur la figure.





1°) Quel est le projeté orthogonal de M sur la droite (GH) ? G

2°) Que représente le plan (BDF) pour le segment $[AC]$?

Le plan (BDF) est le plan médiateur de $[AC]$.

3°) Quel est le projeté orthogonal de M sur la droite (AC) ? O

Le plan passant par M et orthogonal à (AC) est le plan (BDF).
Il coupe (AC) au point O (qui est aussi le milieu de $[AC]$).

4°) Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
Écrire uniquement les lettres V (pour vrai) et F (pour faux) sur les pointillés.

• Les droites (AF) et (CH) sont orthogonales. V

• Le point M est équidistant des points A et C. V

• Les droites (OE) et (AC) sont perpendiculaires. F

• Les droites (FD) et (BH) sont perpendiculaires. F

• Les droites (EM) et (AD) sont orthogonales. V

Justification :

• Les droites (AF) et (CH) sont orthogonales.

1$^{\text{ère}}$ méthode :
On a (BE) // (CH) (car le quadrilatère BCHE est un rectangle).
(AF) et (BE) sont perpendiculaires car ce sont les diagonales du carré ABFE.
Par l'un des théorèmes d'orthogonalité, on en déduit que (AF) et (CH) sont orthogonales.

La propriété utilisée est : « Si $D \,//\, D'$ et $D' \perp D''$ alors $D \perp D''$ » où D, D', D'' sont des droites de l'espace.

2$^{\text{e}}$ méthode :
On utilise la définition de deux droites orthogonales dans l'espace avec les parallèles passant par un même point.

Soit I le centre de la face ABFE.
(AF) passe par I donc la parallèle à (AF) passant par I est (AF) (confondue).
La parallèle à (CH) passant par I est la droite (BE).
(AF) et (BE) sont perpendiculaires car ce sont les diagonales du carré ABFE.
Donc (AF) et (CH) sont orthogonales.

• Le point M est équidistant des points A et C.

1$^{\text{ère}}$ méthode :
M appartient (BDF) qui est le plan médiateur de $[AC]$.
On sait que tous les points du plan médiateur d'un segment sont équidistants des extrémités.

2$^{\text{e}}$ méthode :
On utilise le théorème de Pythagore (plus long donc à éviter).

• Les droites (OE) et (AC) sont perpendiculaires.
Faux de manière visuelle.

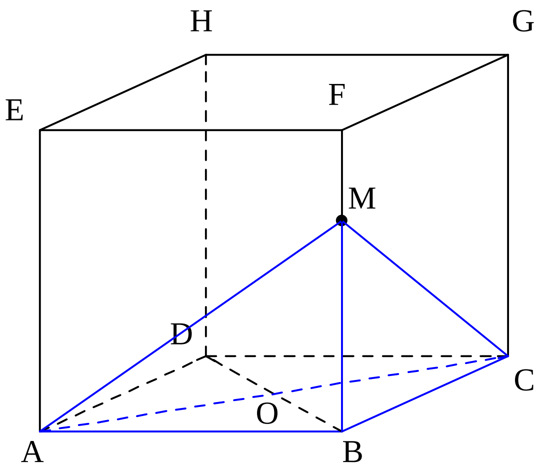
• Les droites (FD) et (BH) sont toutes les deux incluses dans le plan (BDF).
On peut remarquer que le quadrilatère BFHD est un rectangle non carré.
[Les longueurs BD et BF sont en effet différentes comme on peut s'en rendre compte aisément en notant a l'arête du cube : $BF = DH = a$; $BD = FH = a\sqrt{2}$ (formule de la longueur des diagonales d'un carré)].
On en déduit que les droites (FD) et (BH) sont sécantes mais ne sont pas perpendiculaires (elles ne se coupent pas à angle droit).

• La droite (EM) est incluse dans le plan (ABF) et la droite (AD) est orthogonale au plan (ABF) (car ABCDEFGH est un cube).
Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.
On en déduit que les droites (EM) et (AD) sont orthogonales.

5°) On suppose que les arêtes du cube ont pour longueur 3 cm.
a) On pose $BM = x$ cm (x est un réel de l'intervalle $[0\,;3]$).

Exprimer le volume V du tétraèdre MABC en fonction de x. $V = \dfrac{3x}{2}$ cm^3 (une seule égalité)

On applique la formule du volume d'une pyramide.



Le tétraèdre MABC est un tétraèdre trirectangle car les arêtes issues de B sont deux à deux orthogonales.

On prend pour base le triangle ABC. La hauteur issue du point M est donc la droite (BM).

La formule donne $V = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \times BM}{3}$.

Comme le triangle ABC est rectangle en B (puisque ABCD est un carré), on a $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{BA \times BC}{2} = \dfrac{9}{2}$ cm^2.

On peut donc écrire $V = \dfrac{\frac{9}{2} \times x}{3}$ cm^3 ce qui donne immédiatement $V = \dfrac{3x}{2}$ cm^3.

b) On note S la sphère de centre F et de rayon 4 cm. Compléter la phrase suivante :

L'intersection de S et du plan (ABC) est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{7}$ cm.

On commence par faire une représentation en perspective cavalière.

On rappelle ensuite la propriété suivante :

Soit S une sphère de centre O et de rayon R $(R > 0)$.
Soit P un plan de l'espace.
On note H le projeté orthogonal de O sur P.
On pose $d = \text{OH} = \text{d}(\text{O}, P)$.

1$^{\text{er}}$ cas : $\boxed{d < R}$

S et P sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$
$S \cap P = \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (théorème de Pythagore)

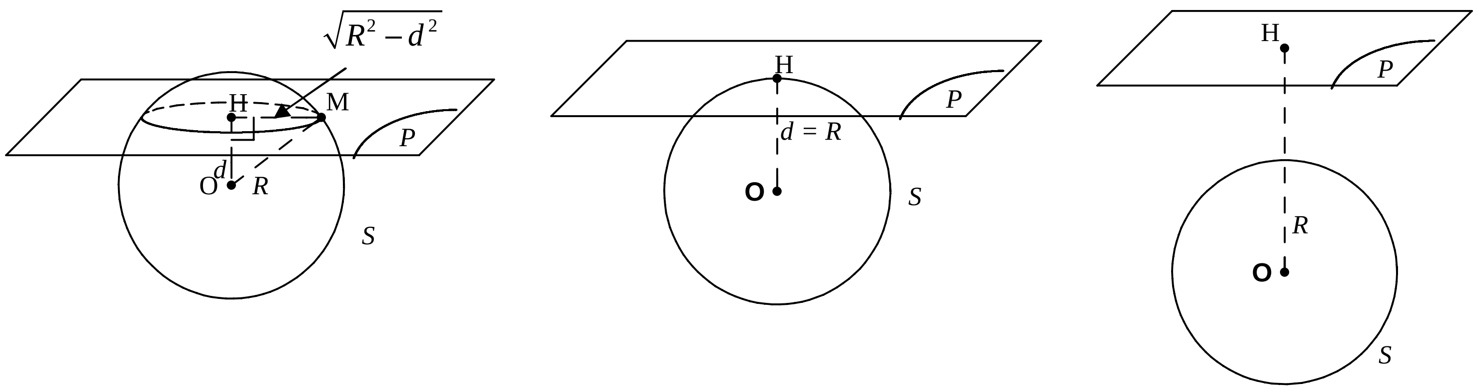
2$^{\text{e}}$ cas : $\boxed{d = R}$

S et P sont tangents en H ($S \cap P = \{\text{H}\}$; l'intersection est un singleton)

3$^{\text{e}}$ cas : $\boxed{d > R}$

S et P n'ont aucun point commun ($S \cap P = \varnothing$)

1$^{\text{er}}$ cas : 2$^{\text{e}}$ cas : 3$^{\text{e}}$ cas :



Le projeté orthogonal de F sur le plan (ABC) est B.

On a donc $\text{d}(\text{F}, (\text{ABC})) = \text{FB} = 3$ cm (car on suppose que les arêtes du cube ont pour longueur 3 cm)/

Or le rayon de S est 4 cm.

La distance de F au plan (ABC) est strictement inférieure au rayon de S.

D'après la propriété, l'intersection de S et du plan (ABC) est un cercle de centre B.

On calcule son rayon r grâce au théorème de Pythagore (formule contenu dans l'énoncé de la propriété).

On a $r = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ cm.

c) Compléter l'égalité : $\text{DM} = \sqrt{x^2 + 18}$ cm (résultat en fonction de x).

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle BDM rectangle en B.

On a $\text{BD} = 3\sqrt{2}$ cm (formule de la diagonale d'un carré).

On obtient le résultat immédiatement.

V.

Soit ABCDEFGH un pavé droit. On pose $\mathrm{AB}=a$, $\mathrm{AD}=b$, $\mathrm{AE}=c$ où *a*, *b*, *c* sont de réels strictement positifs.
Exprimer en fonction de *a*, *b*, *c* l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle ABGH.

$$\mathcal{A}=a\sqrt{b^2+c^2} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On peut commencer par faire une figure.

Comme ABGH est un rectangle, on a $\mathcal{A}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AH}$.

Or $\mathrm{AB}=a$ et $\mathrm{AH}=\sqrt{b^2+c^2}$ donc $\mathcal{A}=a\sqrt{b^2+c^2}$.

On peut effectuer une analyse dimensionnelle rapide.