T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 3 décembre 2021

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1°) Écrire une expression simplifiée de u_n en fonction de n à l'aide d'une factorielle.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \ldots\ldots\ldots$$

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-2)^{3n}}{3^{2n}}$ pour tout entier naturel n.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Recopier et compléter la phrase « (u_n) converge vers … ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 3}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………

1°) Pour n entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = \dfrac{1}{3^n - 1}$ ».

Vérifier que la phrase $P(1)$ est vraie.

On attend une rédaction soignée : « d'une part, … », « d'autre part »…

……

……

……

2°) On admet que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geqslant 1$, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Compte tenu du résultat de la question 1°), on peut en déduire que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ c'est-à-dire que $u_n = \dfrac{1}{3^n - 1}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

……

……

IV. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2\sqrt{n} - n$ pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Quelle forme indéterminée rencontre-t-on quand on cherche cette limite directement avec l'expression de u_n ?

……

……

Proposer une expression factorisée de u_n pour n entier naturel quelconque qui permette de lever l'indétermination puis déterminer la limite cherchée.

……

……

Numéro : …..	Prénom et nom : …………………….…………………………

V. (2 points) Questions de cours

1°) Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On suppose que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell'$ où ℓ et ℓ' sont deux réels.

Compléter : $u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{}$ ….. $u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{}$ …..

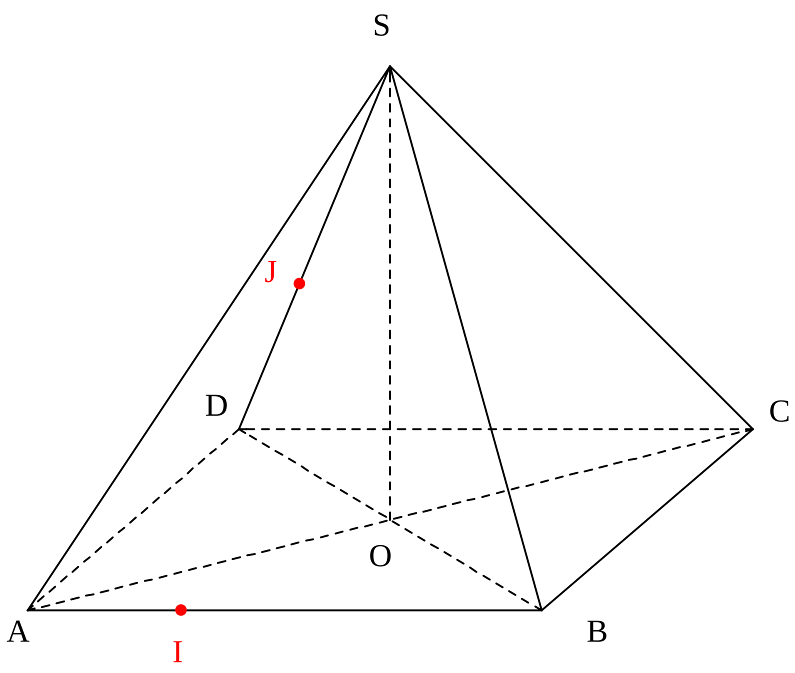
2°) Donner le terme général d'une suite (u_n) qui n'admet pas de limite. On attend un exemple.

………... (une seule égalité)

VI. (2 points)

On considère une pyramide SABCD régulière de sommet S dont la base ABCD est un carré de centre O.
Soit I un point quelconque du segment $[AB]$ distinct de A et de B.
Soit J un point quelconque du segment $[SD]$ distinct de S et de D.
Construire le point d'intersection K des droites (CI) et (BD).
On n'oubliera pas d'utiliser des pointillés pour les parties cachées.

Compléter l'égalité : $(CIJ) \cap (SBD) =$ ……. Aucun tracé n'est demandé pour cette question.



VII. (2 points)

On considère l'équation différentielle $y + 2y' = 0$ (E). Compléter la phrase :

Les solutions de (E) sont les fonctions ……………………………………………………………..

………..

Bonus donné à l'oral :

On reprend l'exercice VI.

On considère une pyramide SABCD régulière de sommet S dont la base ABCD est un carré de centre O.
On pose $\text{AB} = a$ et $\text{SA} = b$.
Exprimer l'aire totale $\mathcal{A}$ de la pyramide en fonction de a et b.

Corrigé de l'interrogation écrite du 3-12-2021

I.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1°) Écrire une expression simplifiée de u_n en fonction de n à l'aide d'une factorielle.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{\color{red}{n}} = \prod_{k=1}^{k={\color{red}{n}}} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (la variable est repassée en rouge, il s'agit de n ; k est une variable muette)

On peut éventuellement calculer u_1, u_2, u_3, u_4… pour comprendre ce qui se passe dans les calculs.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On développe le produit. k est une « variable muette » qui sert à définir le produit. Elle prend successivement les valeurs 1 (plus petite valeur), 2, …, n (plus grande valeur).

k peut être remplacée par n'importe quelle lettre autre que n : on peut écrire $u_n = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\sqrt{i}}$ ou $u_n = \prod_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \ldots \times \frac{1}{\sqrt{n}}$

$= \frac{1 \times 1 \times \ldots \times 1}{\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \ldots \times \sqrt{n}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \ldots \times \sqrt{n}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1 \times 2 \times \ldots \times n}}$ (on applique la propriété : « un produit de racines carrées est égal à la racine carrée du produit » apprise sous la forme $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour a et b réels positifs ou nuls)

$= \frac{1}{\sqrt{n!}}$

2^{e} méthode :

On utilise le symbole (la notation) Π pour faire la démonstration.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (la variable est repassée en rouge, il s'agit de n ; k est une variable muette)

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=n} \sqrt{k}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^{k=n} k}}$$

$= \frac{1}{\sqrt{n!}}$ (le résultat dépend bien de n)

2°) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

On va utiliser l'expression simplifiée obtenue à la question précédente (il n'est pas possible de déterminer la limite avec l'expression initiale sous forme de produit).

On procède en deux temps.

On sait que $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$ (limite de référence du cours) donc $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n!} = +\infty$ (passage à la racine carrée).
On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ (passage à l'inverse).

On applique les propriétés suivantes :

Pour $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n!} = +\infty$, on utilise le deuxième point de la propriété suivante pour la racine carrée :

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont positifs ou nuls.

• Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{l}$, alors $\sqrt{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{\mathrm{l}}$.

• Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, alors $\sqrt{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Pour $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on utilise le deuxième point de la propriété suivante pour l'inverse :

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont non nuls.

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{l}$ avec $\mathrm{l} \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\mathrm{l}}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{l}$ avec $\mathrm{l} \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\mathrm{l}}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^-$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-2)^{3n}}{3^{2n}}$ pour tout entier naturel *n*.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$. Recopier et compléter la phrase « (u_n) converge vers … ».

On commence par transformer l'expression de u_n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-2)^{3n}}{3^{2n}}$$

$$= \frac{\left[(-2)^3\right]^n}{\left(3^2\right)^n}$$

$$= \frac{(-8)^n}{9^n}$$

$$= \left(-\frac{8}{9}\right)^n$$

$-1 < -\dfrac{8}{9} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On peut dire que (u_n) converge vers 0.

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1=\dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2u_n+3}$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

1°) Pour n entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n=\dfrac{1}{3^n-1}$ ».

Vérifier que la phrase $P(1)$ est vraie.

On attend une rédaction soignée : « d'une part, … », « d'autre part »…

Vérifions que la phrase $P(1)$ est vraie c'est-à-dire que $u_1=\dfrac{1}{3^1-1}$.

Il s'agit de démontrer une égalité. L'un des moyens est de s'occuper de chaque membre séparément.

On peut aussi voir cela comme : « Il faut démontrer que $\dfrac{1}{3^1-1}=\dfrac{1}{2}$ ».

D'une part, $u_1=\dfrac{1}{2}$ (premier terme de la suite qui sert à définir la suite).

D'autre part, $\dfrac{1}{3^1-1}=\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$.

On constate que $u_1=\dfrac{1}{3^1-1}$.

On en déduit que $P(1)$ est vraie.

2°) On admet que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k\geqslant 1$, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Compte tenu du résultat de la question 1°), on peut en déduire que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ c'est-à-dire que $u_n=\dfrac{1}{3^n-1}$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n=+\infty$ car $3>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(3^n-1)=+\infty$ et on en déduit par opération (passage à l'inverse) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

On peut dire que (u_n) converge vers 0.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2\sqrt{n}-n$ pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Quelle forme indéterminée rencontre-t-on quand on cherche cette limite directement avec l'expression de u_n ?

On a vu quatre types de formes indéterminées que l'on écrit symboliquement entre guillemets : « $\infty-\infty$ », « $0\times\infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », « $\dfrac{0}{0}$ ».

Dans ces 4 cas, on ne sait pas déterminer la limite de la suite par les règles d'opérations algébriques.

Dans tous les autres cas, on sait trouver la limiter de la suite.

Quand on cherche $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ directement avec l'expression de u_n, on rencontre une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

Proposer une expression factorisée de u_n pour n entier naturel quelconque qui permette de lever l'indétermination puis déterminer la limite cherchée.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2\sqrt{n}-\sqrt{n}\times\sqrt{n}$$

$$=\sqrt{n}\left(2-\sqrt{n}\right)$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\sqrt{n}\right)=-\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Pour $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\sqrt{n}\right)=-\infty$, on utilise la propriété :

> (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
> k est un réel.
>
> • Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $ku_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} k\ell$.
>
> • Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $ku_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $k>0$ et $ku_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ si $k<0$.
>
> • Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $ku_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ si $k>0$ et $ku_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $k<0$.

La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Autre factorisation possible :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=n\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

V. Questions de cours

1°) Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ où ℓ et ℓ' sont deux réels.

Compléter : $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell+\ell'$ $\qquad$ $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ell'$

2°) Donner le terme général d'une suite (u_n) qui n'admet pas de limite. On attend un exemple.

$$u_n=(-1)^n \quad \text{(une seule égalité)}$$

On peut aussi donner $u_n=(-2)^n$, $u_n=\cos n$, $u_n=\sin n$... (les deux dernières suites ont été rencontrées en exercices).

On peut ajouter des constantes : $u_n = (-1)^n + 2$, $u_n = 2 \times (-1)^n$

Le cours nous dit que, pour $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n' a pas de limite.

On pouvait donc prendre une suite géométrique de raison inférieure ou égale à – 1 et de premier terme non nul.
En revanche, une suite arithmétique admet toujours une limite finie (si la raison est nulle, ce qui donne une suite constante) ou infinie (si la raison est non nulle).

VI.

On considère une pyramide SABCD régulière de sommet S dont la base ABCD est un carré de centre O.

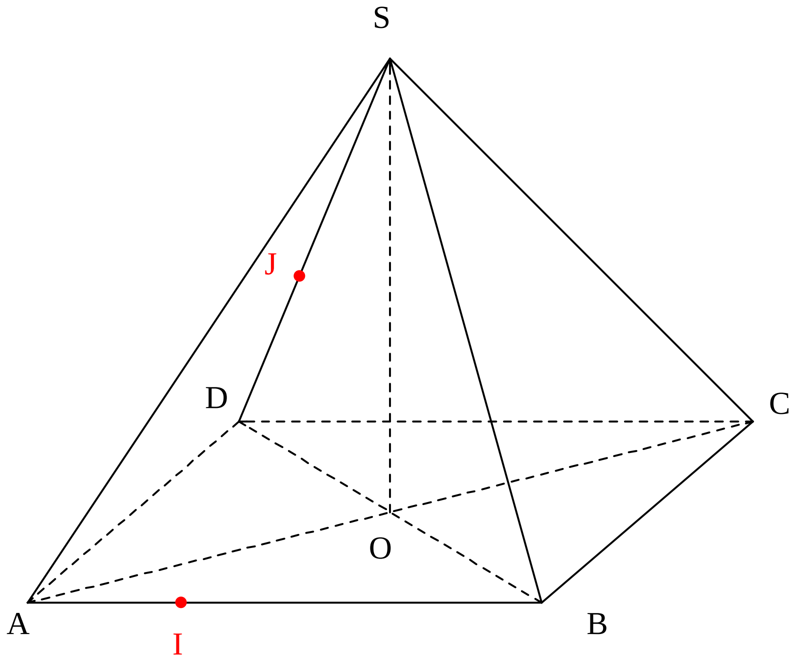
Soit I un point quelconque du segment $[\mathrm{AB}]$ distinct de A et de B.

Soit J un point quelconque du segment $[\mathrm{SD}]$ distinct de S et de D.

Construire le point d'intersection K des droites (CI) et (BD).

On n'oubliera pas d'utiliser des pointillés pour les parties cachées.

Compléter l'égalité : $(\mathrm{CIJ}) \cap (\mathrm{SBD}) = (\mathrm{JK})$. Aucun tracé n'est demandé pour cette question.



Les points J et K sont deux points communs aux plans (CIJ) et (SBD).
Or l'intersection de deux plans distincts qui ont deux points communs (distincts) est une droite.
On en déduit que l'intersection des deux plans est la droite (JK).

VII.

On considère l'équation différentielle $y + 2y' = 0 \quad (\mathrm{E})$. Compléter la phrase :

Les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

(E) est équivalente $y' = -\dfrac{y}{2}$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = -\dfrac{y}{2}$ avec $a = -\dfrac{1}{2}$.

On applique le théorème fondamental donnant les solutions de ce type d'équation différentielle.

Bonus :

$$\mathcal{A} = a^2 + 4 \times \frac{a \times \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}}{2} = a^2 + 2a \times \sqrt{b^2 - \frac{a}{2}^2}$$