T spécialité

Contrôle du vendredi 12 novembre 2021

Durée : 3 heures
- Calculatrice
- Fiche autorisée

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

Le sujet comporte 9 feuilles au total : cette feuille et 8 feuilles numérotées de 1 à 8.
Toutes sont à rendre dans la copie, sans les agrafer.

Il est demandé d'écrire son numéro sur chaque feuille dans le cadre prévu à cet effet.

On écrira uniquement au recto de chaque feuille.

Fiche format A4 à disposition.

I	Fonction logarithme népérien. Fonction exponentielle. Équations et inéquations.	2 points	
II	Fonction exponentielle. Étude de fonction. Suites.	7 points (4 points + 3 points)	
III	Fonction logarithme népérien.	5 points	
IV	Suites.	4 points	
V	Suites.	1 point	
VI	Équations de cercle.	1 point	

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Consignes et indications générales à lire attentivement :

Utiliser la règle :
- pour les tableaux de signes et de variations ;
- pour les flèches de variations ;
- pour les barres de fractions un peu longues.

Pour chaque question, le nombre de lignes donne une idée de la longueur de la réponse attendue.
Par exemple, il y a trois lignes pour la réponse de la question 1°) de l'exercice **III**.
On écrira une phrase par ligne.
Même chose pour la question 5°).
Il est permis d'écrire sur deux colonnes.

On veillera à ne pas écrire ni surligner sur le sujet en dehors des réponses demandées.

Rédiger des réponses assez concises.

Bonus

Exercice à traiter à la fin s'il reste du temps à la fin

On considère l'expression $\mathrm{A}(x, y) = x^2 - 8xy + 19y^2 - 6y + 10$ où x et y sont deux réels.
Pour quelles valeurs de x et y cette expression est-elle minimale ?
Quelle est alors la valeur minimale ?
Indication : On pourra observer que $\mathrm{A}(x, y) = (x-4y)^2 + 3(y-1)^2 + 7$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Feuille 1

Numéro : .....

..... / **2 points**

I. (2 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Faire les tableaux de signes de $\ln x$ et de $\ln x - 2$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ (attention : $\ln x - 2$ désigne $(\ln x) - 2$).

Résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(\ln x)^2 \geqslant \ln\left(x^2\right) \quad (1)$. On commencera par préciser l'ensemble de résolution.

....

....

....

....

....

....

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\dfrac{3}{\mathrm{e}^x + 1} = \mathrm{e}^x - 1 \quad (2)$ et $x^2\mathrm{e}^{x+1} - 3x\mathrm{e}^x = 0 \quad (3)$.

On pourra partager les lignes suivantes en deux colonnes.

....

....

....

....

....

....

....

Feuille 2

Numéro : .....

..... / **7 points**

II. (7 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A (4 points)

Les trois questions de cette partie sont indépendantes les unes des autres.

1°) On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives ln 2 et ln 4.

Comparer les ordonnées de A et B. Que peut-on dire de la droite (AB) ? Justifier brièvement.

....

....

....

2°) La droite D d'équation $y = 3x$ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en O et un autre point que l'on note I.

Quelle est l'abscisse de I ?

…….. (une seule égalité sans justifier)

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on pose $P_n = f(1) \times f(2) \times \ldots \times f(n)$.

a) Calculer au brouillon P_1, P_2, P_3, P_4 et écrire les résultats ci-dessous (une seul résultat par colonne).

…………………………..	…………………………..	…………………………..	…………………………..

b) Démontrer que $P_n = n! \times e^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

....

....

....

....

....

....

....

Feuille 3

Numéro : …..

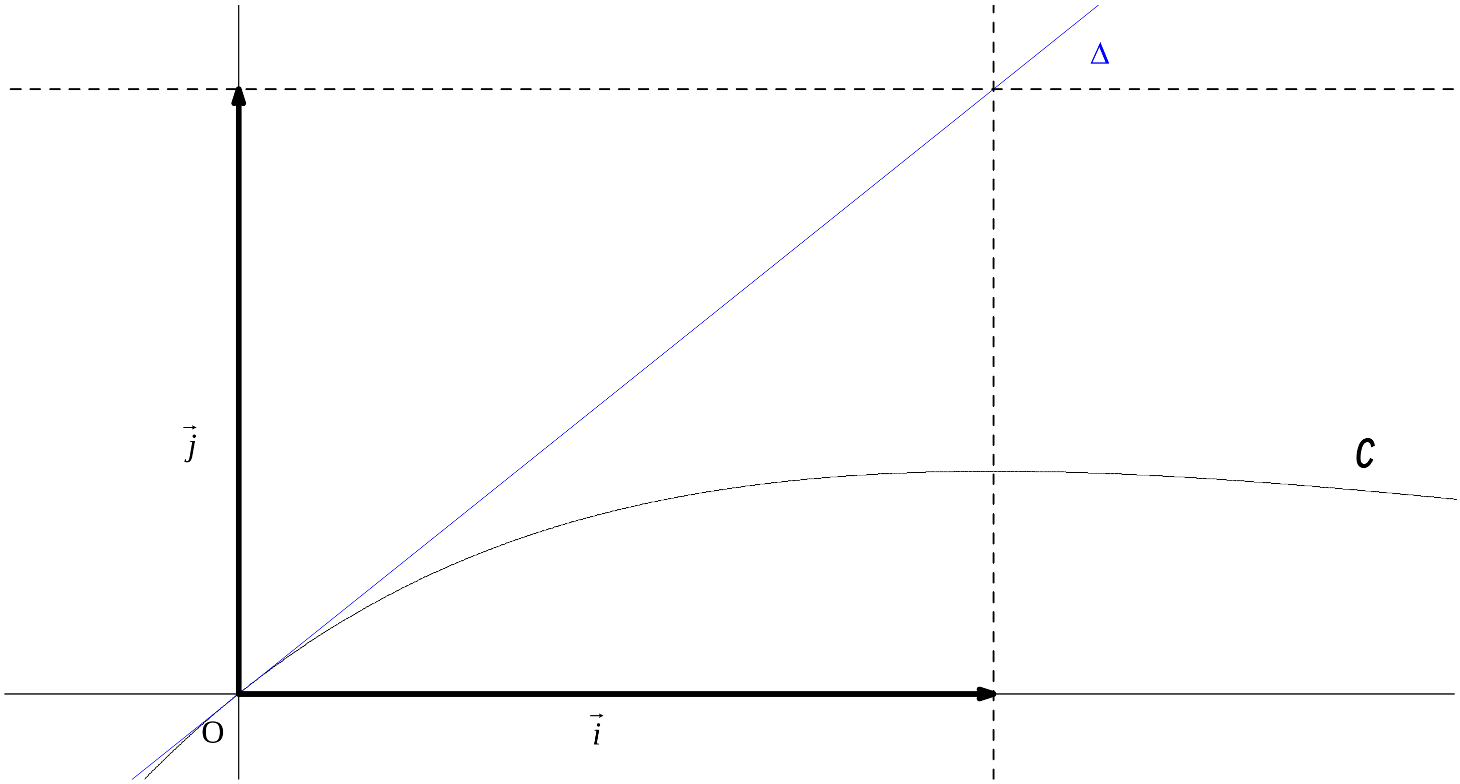
….. / **7 points**

Partie B (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel quelconque et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour tout entier naturel n.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n.

1°) On suppose dans cette question que $a = 1$. Sur le graphique ci-dessous, on donne une partie de la courbe $\mathcal{C}$.
Effectuer avec soin sur ce graphique, en utilisant la droite Δ, la construction des cinq premiers termes de la suite (sur l'axe des abscisses). On utilisera des pointillés.
Il n'y a pas de calculs à faire.



Laisser les traits et éléments de construction apparents.
On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.

D'après ce graphique, que peut-on conjecturer pour le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite ?
Répondre en complétant la phrase :

On peut conjecturer que (u_n) est ……………. à partir de l'indice 0 et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots$.

À l'aide de la calculatrice, donner :

- la valeur arrondie au millième de u_{20}. ……………. (une seule réponse sans égalité)

- le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-5}$ ……………. (une seule réponse sans égalité)

Feuille 4 | **Numéro : …..** | ….. / **7 points**

Suite de la partie B (3 points)

2°) On revient au cas où a est un réel quelconque.

• On considère la fonction $\varphi : x \mapsto x\left(e^{-x}-1\right)$. Quel est le signe $\varphi(x)$ pour x réel quelconque ?

………

………

………

………

• Démontrer que $u_{n+1}-u_n=\varphi(u_n)$ pour tout entier naturel n. En déduire que (u_n) est monotone et préciser son sens de variation.

………

………

………

………

• Existe-t-il une ou des valeurs de a telles que la suite (u_n) soit constante ? Si oui, préciser laquelle ou lesquelles.

……………… (ne pas écrire d'égalités)

3°) On suppose à nouveau que $a=1$. On considère la fonction Python `terme(n)` dans l'encadré ci-dessous qui renvoie la valeur de u_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

```
from math import exp

def terme(n):
    u=1
    for i in range(n):

        u=…………

    return u
```

Compléter l'instruction `u=`………… .

Feuille 5 | **Numéro : …..** | ….. / **5 points**

III. (5 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{a + b\ln x}{x}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ où a et b sont des réels fixés et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer a et b sachant que $\mathcal{C}$ passe par les points $\mathrm{E}(1\,;2)$ et $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\,;0\right)$. Écrire l'expression de *f*.

………

………

………

On suppose dans toute la suite de l'exercice que a et b ont les valeurs ainsi déterminées.

2°) Démontrer sur les lignes ci-contre que pour tout réel $x > 0$ on a $f'(x) = -\dfrac{1+\ln x}{x^2}$.

3°) Faire ci-dessous le tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

Compléter le tableau de variations avec ces limites.

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Tracer $\mathcal{C}$ avec soin sur la feuille 8. Placer les points E et F sur le graphique.

4°) Quel est le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point E ? …. (une seule réponse sans égalité)

Tracer T sur le graphique.

5°) On admet que T recoupe $\mathcal{C}$ en un unique point G dont on note α l'abscisse.

Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième de α. ……….. (une seule valeur sans égalité)

Déterminer graphiquement la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de T sur …………………… .
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de T sur …………………… .
- $\mathcal{C}$ et T sont sécantes aux points ……………... .

Feuille 6

Numéro : …..

….. / **4 points**

IV. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^{\,2}+1}}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 au brouillon. On attend les valeurs exactes sous la forme $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ avec *a* réel strictement positif.

…………	…………	…………	…………	…………

Conjecturer alors l'expression de u_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel quelconque).
On complètera la phrase suivante sans explication par une égalité de la forme $u_n = ...$.

On peut conjecturer que pour tout entier naturel *n* on a ………… .

2°) Le but de cette question est de démontrer que la conjecture est vraie.
On admet que $u_n > 0$ pour tout entier naturel *n* et on considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n^{\,2}}$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
En déduire v_n puis u_n en fonction de *n*.

……

……

……

……

……

……

3°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$. Démontrer que $P_n = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)!}}$.

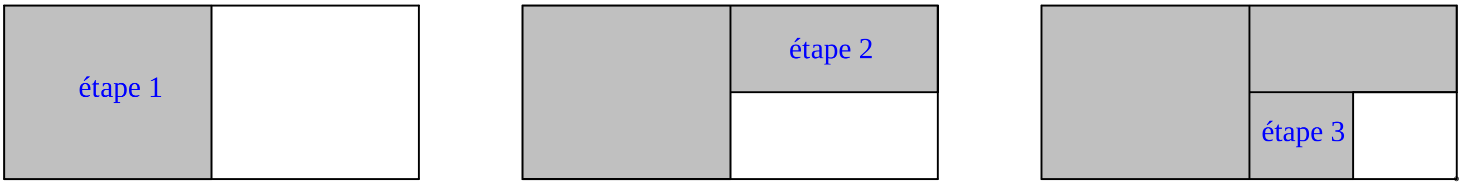
……

……

Feuille 7 | **Numéro : …..** | ….. / **2 points**

V. (1 point)

On considère un rectangle dont les dimensions sont a et b, a et b étant deux réels strictement positifs.
À l'étape 1, on colorie la moitié de la surface du rectangle. À l'étape 2, on colorie la moitié de la surface non coloriée. On procède de même pour le coloriage aux étapes suivantes (voir figures ci-dessous).
Chaque coloriage s'effectue par un partage de rectangle selon un segment parallèle à l'un des côtés.



Quelle est l'aire totale coloriée jusqu'à l'étape n incluse, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 ?

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VI. (1 point)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2+y^2+4x-3y=0$.

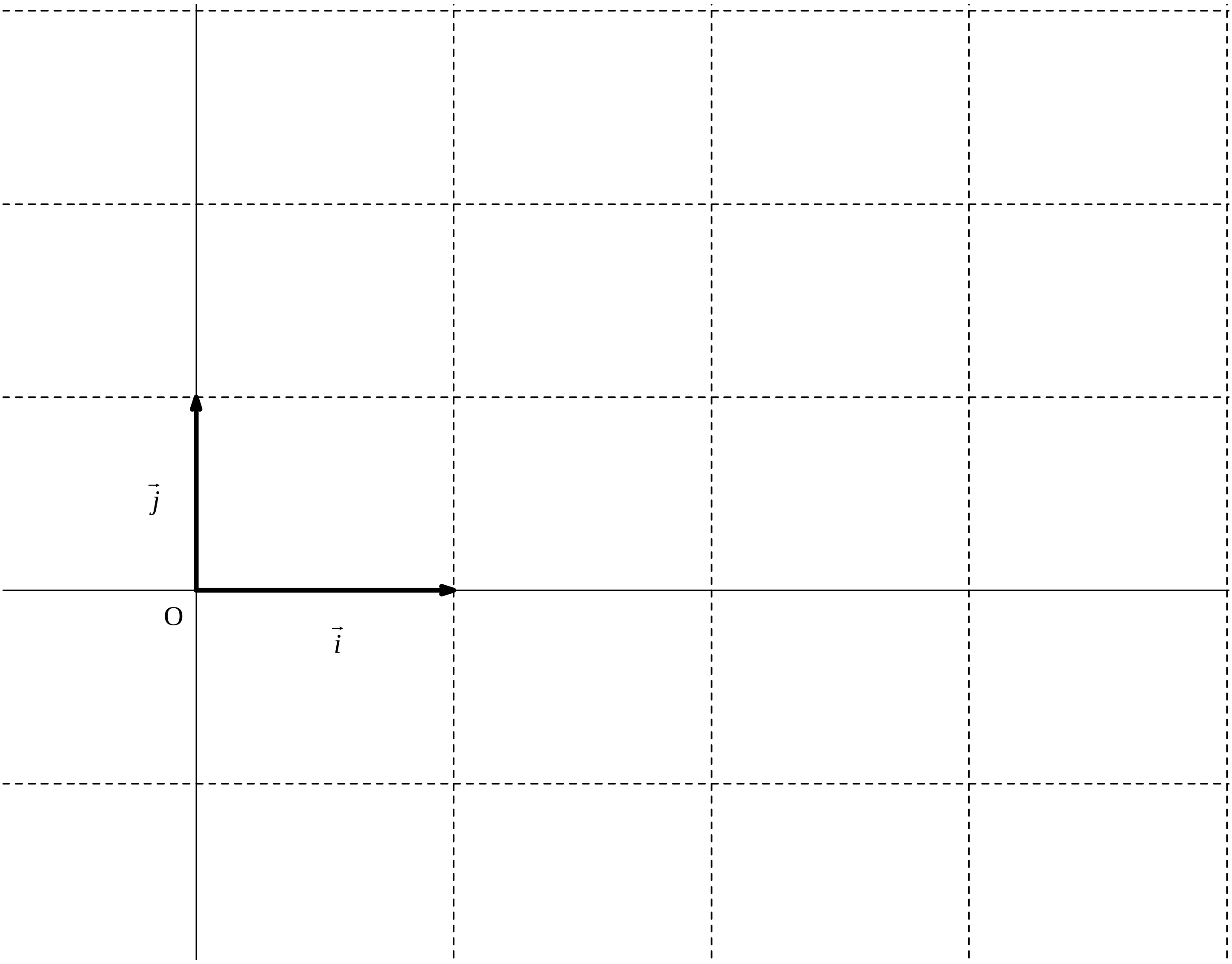
Compléter la phrase :

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(\dots;\dots\right)$ et de rayon …….

Feuille 8

Numéro : …..

Graphique de l'exercice **III**.



Laisser les traits de construction (en pointillés).

Corrigé du contrôle du 12-11-2021

I.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Faire les tableaux de signes de $\ln x$ et de $\ln x - 2$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ (attention : $\ln x - 2$ désigne $(\ln x) - 2$).

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

x	0		e^2		$+\infty$
Signe de $\ln x - 2$	‖	$-$	0	$+$	

Le signe de $\ln x$ est donné dans le cours.

Le signe de $\ln x - 2$ s'obtient aisément en résolvant par exemple une équation (valeur d'annulation) et deux inéquations.

Résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(\ln x)^2 \geqslant \ln(x^2)$ (1). On commencera par préciser l'ensemble de résolution.

On doit avoir $x > 0$ et $x^2 \neq 0$ soit $x > 0$.

L'ensemble de résolution est l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow (\ln x)^2 \geqslant 2\ln x \\ &\Leftrightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x(\ln x - 2) \geqslant 0\end{aligned}$$

On dresse ensuite un tableau de signes en utilisant les deux tableaux précédents.
Une autre méthode consiste à procéder par changement d'inconnue en posant $X = \ln x$.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 =]0\,;1] \cup [e^2\,;+\infty[$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\dfrac{3}{e^x+1} = e^x - 1$ (2) et $x^2e^{x+1} - 3xe^x = 0$ (3).
On pourra partager les lignes suivantes en deux colonnes.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow 3 = (e^x - 1)(e^x + 1) \\ &\Leftrightarrow 3 = (e^x)^2 - 1^2 \\ &\Leftrightarrow 3 = e^{2x} - 1 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln 4 \\ &\Leftrightarrow 2x = 2\ln 2 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 2\end{aligned}$$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 = \{\ln 2\}$

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow x^2e^x \times e - 3xe^x = 0 \\ &\Leftrightarrow xe^x(ex - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } ex - 3 = 0 \quad (\text{car } e^x \text{ ne s'annule pas}) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{e}\end{aligned}$$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3 = \left\{0\,;\frac{3}{e}\right\}$

On vérifie la résolution grâce à la calculatrice (résolution approchée).

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

Les trois questions de cette partie sont indépendantes les unes des autres.

1°) On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives ln 2 et ln 4.

Comparer les ordonnées de A et B. Que peut-on dire de la droite (AB) ? Justifier brièvement.

$$y_{\mathrm{A}} = f\left(\ln 2\right) = \ln 2 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{n}\,2} = \ln 2 \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} = \ln 2 \times \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2} \quad \text{(valeur exacte)}$$

$$y_{\mathrm{B}} = f\left(\ln 4\right) = \ln 4 \times \mathrm{e}^{-\ln 4} = \ln 4 \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 4}} = \ln 4 \times \frac{1}{4} = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} \quad \text{(valeur exacte)}$$

On constate que $y_{\mathrm{A}} = y_{\mathrm{B}}$ donc les points A et B ont la même ordonnée.

On en déduit que la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses.

On ne raisonne qu'avec des valeurs exactes.

2°) La droite D d'équation $y = 3x$ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en O et un autre point que l'on note I.

Quelle est l'abscisse de I ?

$$x_{\mathrm{I}} = -\ln 3 \quad \text{(une seule égalité sans justifier)}$$

On résout l'équation $f\left(x\right) = 3x \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow x\mathrm{e}^{-x} = 3x$

$\Leftrightarrow x\left(\mathrm{e}^{-x} - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\mathrm{e}^{-x} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\mathrm{e}^{-x} = 3$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $-x = \ln 3$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\ln 3$

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on pose $P_n = f\left(1\right) \times f\left(2\right) \times \ldots \times f\left(n\right)$.

a) Calculer au brouillon P_1, P_2, P_3, P_4 et écrire les résultats ci-dessous (une seul résultat par colonne).

$P_1 = \mathrm{e}^{-1}$	$P_2 = 2\mathrm{e}^{-3}$	$P_3 = 6\mathrm{e}^{-6}$	$P_4 = 24\mathrm{e}^{-10}$

b) Démontrer que $P_n = n! \times e^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = 1e^{-1} \times 2e^{-2} \times 3e^{-3} \times ... \times ne^{-n}$$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n \times e^{-1} \times e^{-2} \times e^{-3} \times ... \times e^{-n}$$

$$= n! \times e^{-1-2-3-...-n}$$

$$= n! \times e^{-(1+2+3+...+n)}$$

$$= n! \times e^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$ (on utilise la formule fondamentale $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$)

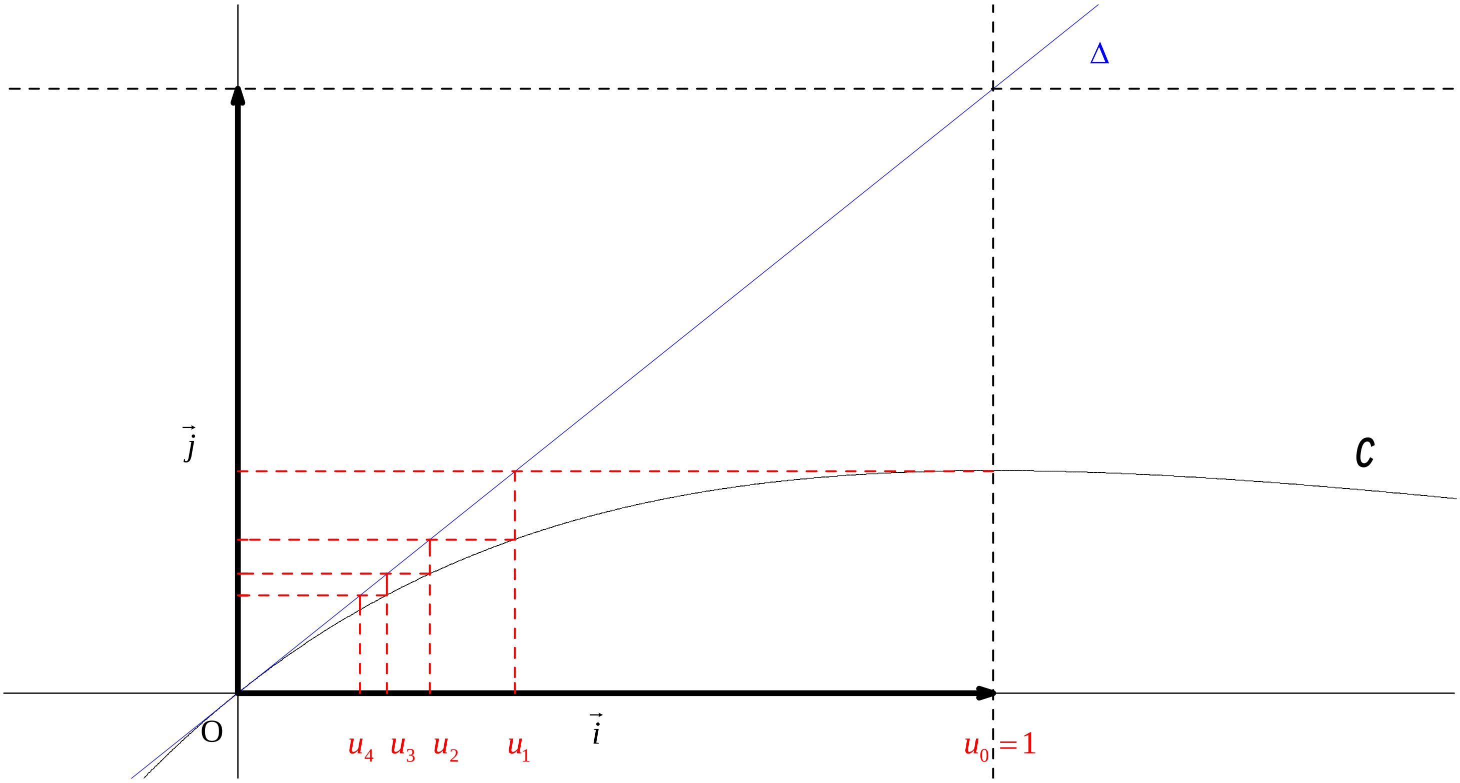
Avec cette formule, on vérifie le résultats du a).

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel quelconque et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour tout entier naturel n.
On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n.

1°) On suppose dans cette question que $a = 1$. Sur le graphique ci-dessous, on donne une partie de la courbe $\mathcal{C}$.
Effectuer avec soin sur ce graphique, en utilisant la droite Δ, la construction des cinq premiers termes de la suite (sur l'axe des abscisses). On utilisera des pointillés.
Il n'y a pas de calculs à faire.

On observe que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(u_n)$. On peut donc utiliser la courbe $\mathcal{C}$.
Par ailleurs, la droite D tracée sur le graphique a pour équation $x = y$. Elle permet de « rabattre » les images sur l'axe des abscisses.



On laisse les traits de construction (en pointillés).

Laisser les traits et éléments de construction apparents.
On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.

On obtient une représentation en « marches d'escalier ».

Avec la calculatrice (touche $\boxed{\text{Ans}}$ par exemple), on obtient :
$u_1 = 0,367879441...$
$u_2 = 0,2546463...$
$u_3 = 0,197399473...$
$u_4 = 0,162037855...$
$u_5 = 0,137798452...$
Ces valeurs sont cohérentes avec celles obtenues sur le graphique.

D'après ce graphique, que peut-on conjecturer pour le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite ?
Répondre en complétant la phrase :

On peut conjecturer que (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0 et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

À l'aide de la calculatrice, donner :

• la valeur arrondie au millième de u_{20}. 0,044 (une seule réponse sans égalité)

• le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-5}$ 9995 (une seule réponse sans égalité)

2°) On revient au cas où *a* est un réel quelconque.

• On considère la fonction $\varphi : x \mapsto x\left(e^{-x}-1\right)$. Quel est le signe $\varphi(x)$ pour *x* réel quelconque ?

On dresse un tableau de signes.

Le signe de $e^{-x}-1$ s'obtient aisément en résolvant par exemple une équation (valeur d'annulation) et deux inéquations.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$	
Signe de $e^{-x}-1$		$+$	0	$-$	
Signe de $\varphi(x)$		$-$	0	$-$	

On vérifie avec des valeurs tests.

On obtient $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) \leqslant 0$.

• Démontrer que $u_{n+1}-u_n=\varphi(u_n)$ pour tout entier naturel *n*. En déduire que (u_n) est monotone et préciser son sens de variation.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n &= u_n e^{-u_n}-u_n \\ &= u_n\left(e^{-u_n}-1\right) \\ &= \varphi(u_n)\end{aligned}$$

On a vu que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) \leqslant 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n \leqslant 0$.

On en déduit que (u_n) est décroissante.

• Existe-t-il une ou des valeurs de *a* telles que la suite (u_n) soit constante ? Si oui, préciser laquelle ou lesquelles.

0 (ne pas écrire d'égalités)

On résout l'équation $f(x)=x$ (propriété du cours).

On obtient 0 pour unique solution.

Dans ce cas, tous les termes de la suite sont nuls.

3°) On suppose à nouveau que $a=1$. On considère la fonction Python `terme(n)` dans l'encadré ci-dessous qui renvoie la valeur de u_n pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

```
from math import exp

def terme(n):
    u=1
    for i in range(n):
        u=u*exp(-u)
    return u
```

Compléter l'instruction `u=`............ .

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{a+b\ln x}{x}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ où a et b sont des réels fixés et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer a et b sachant que $\mathcal{C}$ passe par les points $\mathrm{E}(1\,;2)$ et $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\,;0\right)$. Écrire l'expression de f.

On a $f(1)=2$ donc $\dfrac{a+b\ln 1}{1}=2$ d'où $a=2$.

On a $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=0$ donc $\dfrac{a+b\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}}{\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}}=0$ d'où $a+b\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}=0$.

Or $a=2$ et $\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}=-2$.

On en déduit que $2-2b=0$ d'où $b=1$.

L'expression de f est donc donnée par $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{x}$.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que a et b ont les valeurs ainsi déterminées.

2°) Démontrer sur les lignes ci-contre que pour tout réel $x>0$ on a $f'(x)=-\dfrac{1+\ln x}{x^2}$.

3°) Faire ci-dessous le tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

Compléter le tableau de variations avec ces limites.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-(2+\ln x)\times 1}{x^2}$$

$$=\frac{-1-\ln x}{x^2}$$

$$=-\frac{1+\ln x}{x^2}$$

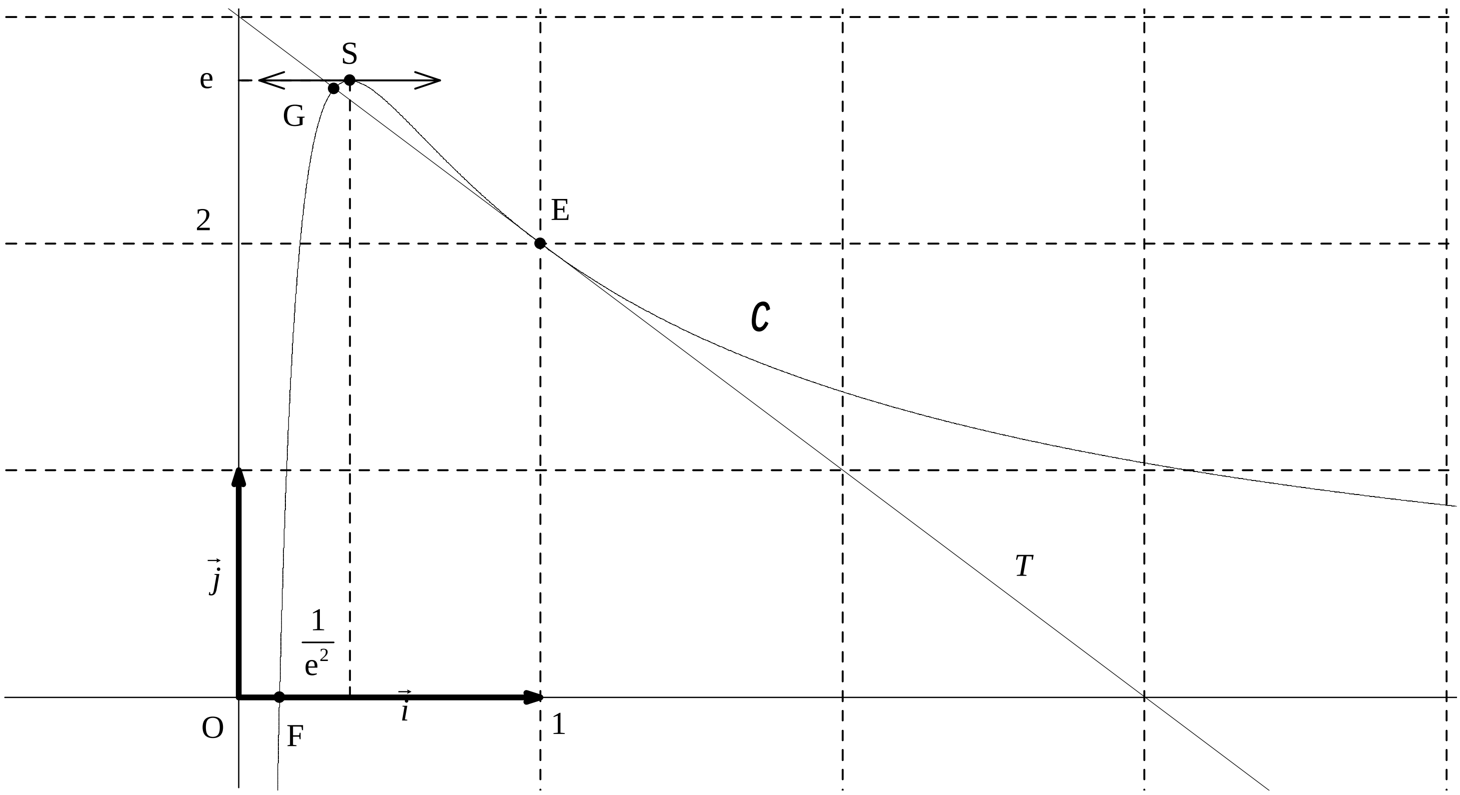
x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
Signe de $1+\ln x$	‖	$-$	0^{num}	$+$	
Signe de x^2	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
Signe de $f\,'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	e	↘	0

On observe que f présente un maximum global en $\frac{1}{\mathrm{e}}$. Ce maximum est égal à $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{2+\ln\frac{1}{\mathrm{e}}}{\frac{1}{\mathrm{e}}}=\frac{2-1}{\frac{1}{\mathrm{e}}}=\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}$.

Les limites de f aux bornes de son ensemble de définition sont compatibles avec les variations.

Tracer $\mathcal{C}$ avec soin sur la feuille 8. Placer les points E et F sur le graphique.

On commence par placer le point S correspondant au maximum.
En ce point, la tangente est horizontale. On la trace.
On place les points E et F.
On place éventuellement d'autres points pour affiner le tracé.



4°) Quel est le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point E ? -1 (une seule réponse sans égalité)
Tracer T sur le graphique.

On a $f\,'(1)=-\frac{1+\ln 1}{1^2}$ soit $f\,'(1)=-1$ ce qui donne le coefficient directeur de T.

5°) On admet que T recoupe $\mathcal{C}$ en un unique point G dont on note α l'abscisse.
Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième de α. 0,316 (une seule valeur sans égalité)

T a pour équation $y = 3 - x$.
On effectue une résolution approchée de l'équation $f(x) = 3 - x$ soit $\dfrac{2 + \ln x}{x} = 3 - x$ à l'aide de la calculatrice.

Déterminer graphiquement la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de T sur $]\alpha\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de T sur $]0\,;\alpha[$.
- $\mathcal{C}$ et T sont sécantes aux points G et E.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2 + 1}}$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 au brouillon. On attend les valeurs exactes sous la forme $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ avec a réel strictement positif.

$u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$	$u_4 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$	$u_5 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Conjecturer alors l'expression de u_n en fonction de n (n étant un entier naturel quelconque).
On complètera la phrase suivante sans explication par une égalité de la forme $u_n = \ldots\ldots\ldots$.

On peut conjecturer que pour tout entier naturel n on a $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

2°) Le but de cette question est de démontrer que la conjecture est vraie.
On admet que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n et on considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{{u_n}^2}$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}{}^2}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n{}^2+1}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{u_n{}^2}{\left(\sqrt{u_n{}^2+1}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{u_n{}^2}{u_n{}^2+1}}$$

$$= \frac{u_n{}^2+1}{u_n{}^2}$$

$$= \frac{u_n{}^2}{u_n{}^2} + \frac{1}{u_n{}^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{u_n{}^2}$$

$$= 1 + v_n$$

On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 + n \times 1$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 1 + n$.

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{1}{u_n{}^2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n{}^2 = \dfrac{1}{v_n}$.

De plus, l'énoncé demande d'admettre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

On peut donc dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{\dfrac{1}{v_n}}$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{v_n}}$ ce qui donne finalement $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, résultat qui correspond à la conjecture.

3°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$. Démontrer que $P_n = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)!}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \ldots \times \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \ldots \times \sqrt{n+1}}$$

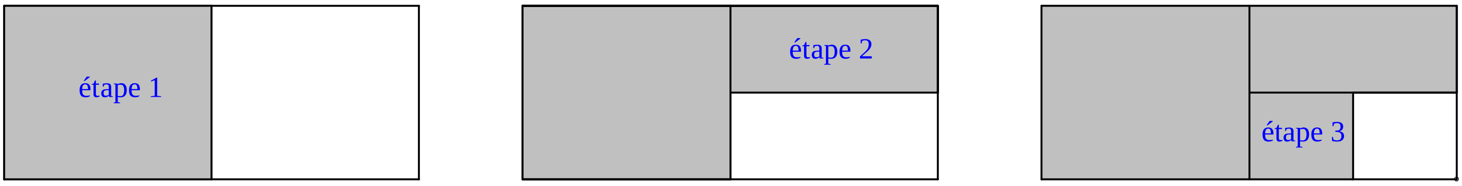
$$= \frac{1}{\sqrt{1 \times 2 \times \ldots \times (n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}$$

On peut aussi utiliser le symbole (la notation) Π (qui désigne le produit).

V.

On considère un rectangle dont les dimensions sont *a* et *b*, *a* et *b* étant deux réels strictement positifs.
À l'étape 1, on colorie la moitié de la surface du rectangle. À l'étape 2, on colorie la moitié de la surface non coloriée. On procède de même pour le coloriage aux étapes suivantes (voir figures ci-dessous).
Chaque coloriage s'effectue par un partage de rectangle selon un segment parallèle à l'un des côtés.



Quelle est l'aire totale coloriée jusqu'à l'étape *n* incluse, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1 ?

Il y a plusieurs manières de répondre.

1[ère] méthode :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n l'aire coloriée à l'étape *n*. On a donc $u_1 = \dfrac{ab}{2}$.

À chaque étape, l'aire coloriée est égale à la moitié de l'aire coloriée à l'étape précédente.

Cela se traduit mathématiquement par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$.

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note S_n l'aire totale colorée jusqu'à l'étape *n*.

On peut aisément écrire S_n comme une somme : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

On applique la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{ab}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{ab\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}}$$

$$= ab\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$= ab\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \quad \text{(étape facultative)}$$

On peut tester la formule pour $n=1$, $n=2$ etc.

2e méthode :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n l'aire qui reste non coloriée à l'étape *n*. On a donc $u_1 = \dfrac{ab}{2}$.

À chaque étape, l'aire qui reste non coloriée est égale à la moitié de l'aire qui reste non coloriée à l'étape précédente.

Cela se traduit mathématiquement par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$.

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{ab}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{ab}{2^{1+n-1}}$$

$$= \frac{ab}{2^n}$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note S_n l'aire totale colorée jusqu'à l'étape *n*.

On peut aisément écrire $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = ab - u_n$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = ab - \dfrac{ab}{2^n}$ soit $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = ab\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

On retrouve la formule obtenue avec la 1ère méthode.

On peut tester la formule pour $n=1$, $n=2$ etc.

VI.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0$.

Compléter la phrase :

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-2 ; \dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{2}$.

Soit M un point quelconque de *P*, de coordonnées $\left(x ; y\right)$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 3y = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 4 - \frac{9}{4} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \\
&\Leftrightarrow (x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

La dernière égalité obtenue permet d'affirmer que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-2 ; \dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{5}{2}$.

Bonus

On considère l'expression $\mathrm{A}(x,\ y)=x^2-8xy+19y^2-6y+10$ où x et y sont deux réels.
Pour quelles valeurs de x et y cette expression est-elle minimale ?
Quelle est alors la valeur minimale ?

Indication : On pourra observer que $\mathrm{A}(x,\ y)=(x-4y)^2+3(y-1)^2+7$.

On vérifie aisément que $\forall (x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \quad \mathrm{A}(x,\ y)=(x-4y)^2+3(y-1)^2+7$.

Cette forme permet d'obtenir une minoration de $\mathrm{A}(x,\ y)$.

On observe ensuite que $\forall (x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \quad (x-4y)^2\geqslant 0$ et $3(y-1)^2\geqslant 0$.

On en déduit que $\forall (x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \quad \mathrm{A}(x,\ y)\geqslant 7$.

On obtient donc 7 pour minorant et 7 est atteint lorsque $(x-4y)^2+3(y-1)^2=0 \quad (1)$ (et uniquement dans ce cas).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4y=0 \\ y-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

7 est donc la valeur minimale de $\mathrm{A}(x,\ y)$; elle est atteinte pour $(x,\ y)=(4,1)$.