T exp

Interrogation écrite du lundi 15 novembre 2021 (20 minutes)

- fiche
- calculatrice

I. (2 points) Question de cours

Soit a un réel. On note S l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

• Si ………, alors $S =$ .... • Si ………, alors $S =$ .... • Si ………, alors $S =$ ....

II. (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - \mathrm{i})^2 = -4 \quad (1)$ par la méthode la plus simple possible.

………

………

………

………

III. (5 points : 1°) 2 points + 1 point ; 2°) 2 points)

On pose $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i} \,;\, -\mathrm{i}\}$ et on considère la fonction f : $\mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}$.

$$z \mapsto \frac{\overline{z}}{z^2 + 1}.$$

1°) Calculer $f(1+\mathrm{i})$ et $f\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)$. On donnera les résultats sous forme algébrique.

………

………

………

………

2°) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

L'image d'un réel par f est un réel.	
L'image d'un imaginaire pur distinct de i et de – i par f est un imaginaire pur.	

IV. (5 points : 2 points + 2 points + 1 point)

On pose $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;8\,;10\,;12\}$. On choisit un élément x au hasard dans E.

On note A l'événement : « x est impair » et B l'événement : « $\frac{1}{x}$ est un nombre décimal ».

On munit E de la probabilité uniforme P.

Calculer $P(A)$ et $P(A/B)$.

Que peut-on dire de A et B ? On donnera les résultats sous forme algébrique.

……

……

……

……

……

V. (5 points : 1 point + 2 points + 2 points)

La plus grande puissance de 2 d'exposant entier naturel que puisse « calculer » la calculatrice Numworks est $A = 2^{1023}$.

À l'aide de l'affichage de la calculatrice, donner le nombre de chiffres de l'écriture de A en base dix.

………… (un seul résultat, sans égalité)

Retrouver le résultat précédent par le calcul en utilisant une formule du cours.

……

……

Calculer le nombre de chiffres de l'écriture du nombre $B = 2^{2021}$ en base dix.

……

……

Numéro : …..	**Prénom et nom :** ………………………………………………	**Note : ….. / 20**

Conseils à l'oral

II.

On ne développe pas le membre de gauche.
On n'utilise pas de discriminant.

III. Utiliser la règle pour faire les barres de fraction.

IV.

$P\left(\mathrm{A}/\mathrm{B}\right)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Corrigé de l'interrogation écrite du 15-11-2021

I. Question de cours

Soit a un réel. On note S l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

- Si $a > 0$, alors $S = \left\{\sqrt{a}\,;-\sqrt{a}\right\}$.
- Si $a = 0$, alors $S = \{0\}$.
- Si $a < 0$, alors $S = \left\{\mathrm{i}\sqrt{-a}\,;-\mathrm{i}\sqrt{-a}\right\}$.

II.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-\mathrm{i})^2 = -4 \quad (1)$ par la méthode la plus simple possible.

On applique directement le résultat du cours rappelé dans le **I**. On est dans le troisième cas.

$(1) \Leftrightarrow z-\mathrm{i} = 2\mathrm{i}$ ou $z-\mathrm{i} = -2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z = 3\mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \{3\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\}$

III.

On pose $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\}$ et on considère la fonction $f :\ \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}$.

$$z \mapsto \frac{\overline{z}}{z^2+1}.$$

1°) Calculer $f(1+\mathrm{i})$ et $f\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)$. On donnera les résultats sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} f(1+\mathrm{i}) &= \frac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2+1} \\ &= \frac{1-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}-1+1} \\ &= \frac{1-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} \\ &= \frac{(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} \\ &= \frac{-1-3\mathrm{i}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) &= \frac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2+1} \\ &= \frac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{-2+1} \\ &= \frac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{-1} \\ &= \mathrm{i}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Pour le second calcul, on utilise $\overline{\mathrm{i}\sqrt{2}} = -\mathrm{i}\sqrt{2}$. Le conjugué d'un imaginaire pur est égal à son opposé.

On vérifie les deux calculs à l'aide de la calculatrice (en tapant directement les expressions).

2°) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

L'image d'un réel par f est un réel.	Vrai
L'image d'un imaginaire pur distinct de i et de – i par f est un imaginaire pur.	Vrai

L'affirmation 1 est quasiment évidente.
Si z est un réel, on a $\overline{z} = z$ et $z^2 + 1$ est un réel. Donc $f(z) \in \mathbb{R}$ car le quotient de deux réels est un réel.

L'affirmation 2 se démontre aisément.
Si z est un imaginaire pur distinct de i et de – i, on peut poser $z = \mathrm{i}y$ avec y distinct de 1 et de – 1.

On calcule ensuite $f(z) = \dfrac{\overline{\mathrm{i}y}}{(\mathrm{i}y)^2 + 1} = \dfrac{-\mathrm{i}y}{1 - y^2} = \mathrm{i}\dfrac{y}{y^2 - 1}$.

Cette dernière écriture montre que $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

IV.

On pose $\mathrm{E} = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;8\,;10\,;12\}$. On choisit un élément x au hasard dans E.

On note A l'événement : « x est impair » et B l'événement : « $\dfrac{1}{x}$ est un nombre décimal ».

On munit E de la probabilité uniforme P.
Calculer $P(\mathrm{A})$ et $P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$.
Que peut-on dire de A et B ?

On a $\mathrm{card}\,\mathrm{E} = 9$.

Il y a 3 résultats favorables pour A (à savoir 1, 3, 5) donc $P(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{card A}}{\text{card E}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

$P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ (parmi les résultats qui réalisent B, à savoir 1, 2, 4, 5, 8, 10, il y en a deux qui réalisent A, à savoir 1 et 5).

On peut éventuellement utiliser la formule $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$. Cela complique un tout petit peu.

On constate que $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$.
On peut donc dire que les événements A et B sont indépendants pour P.

V.

La plus grande puissance de 2 d'exposant entier naturel que puisse « calculer » la calculatrice Numworks est $A = 2^{1023}$.
À l'aide de l'affichage de la calculatrice, donner le nombre de chiffres de l'écriture de A en base dix.

308 (un seul résultat, sans égalité)

La calculatrice donne l'affichage $A \approx 8,9884656743116 \times 10^{307}$.

Retrouver le résultat précédent par le calcul en utilisant une formule du cours.

On sait que le nombre de chiffres de l'écriture en base dix d'un entier naturel N non nul est égale à $E(\log N)+1$.

Pour connaître le nombre de chiffres de l'écriture en base dix de A, on calcule $E(\log A)+1$.

On calcule log A à l'aide de la calculatrice.

La calculatrice transforme directement $\log\left(2^{1023}\right)$ en $1023\log(2)$.
On obtient l'affichage : 307,95368556425.

Ainsi $\log A = 307,9536855642...$.

$\log A = 1023\log 2$ et avec la calculatrice, on obtient $\log A = 1023\log 2 = 307,9537...$.

Donc $E(\log A)+1 = 307+1 = 308$.

L'écriture en base dix de A comporte donc 308 chiffres.

Calculer le nombre de chiffres de l'écriture du nombre $B = 2^{2021}$ en base dix.

On calcule log B à l'aide de la calculatrice.

La calculatrice transforme directement $\log\left(2^{2021}\right)$ en $2021\log(2)$.
On obtient l'affichage : 608,38162123691.

Ainsi $\log B = 608,3816212369...$.

$\log B = 2021\log 2$ et avec la calculatrice, on obtient $\log B = 608,3816...$.

L'écriture en base dix de A comporte donc 609 chiffres.

Remarque : Comme log 2 est un irrationnel, log A et log B sont aussi des nombres irrationnels.