T exp

Interrogation écrite du lundi 8 novembre 2021 (50 minutes)

- fiche
- calculatrice

I. (5 points : 2 points + 1 point + 2 points)

Démontrer que le nombre $x=2-\frac{1}{11}\times\sqrt{1-\sqrt{\frac{25}{81}}}$ est un nombre rationnel puis donner sans expliquer son développement décimal (écrire une égalité).

Quelle est la nature du nombre $y=\frac{1}{x}$? Répondre avec précision en justifiant brièvement (une phrase suffira).

………

………

………

II. (9 points : 3 points par équation)

On considère les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$\frac{\mathrm{i}+z}{1-\mathrm{i}z}=\frac{1+\mathrm{i}z}{\mathrm{i}-z}$ (1) ; $\frac{z}{z^2+2}=1$ (2) ; $\overline{\mathrm{i}z}=2+\mathrm{i}\left(1+\overline{z}\right)$ (3).

Compléter les égalités ci-contre donnant les ensembles de solutions respectifs S_1, S_2, S_3 de ces équations.

Rédiger complètement la résolution de deux équations au choix.

Pour les équations (1) et (2), on commencera par donner leur ensemble de résolution.

$S_1=$ ……………………………

$S_2=$ ……………………………

$S_3=$ ……………………………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (2 points)

On pose $E = [\![-n\,;n]\!]$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On choisit un élément x au hasard dans l'ensemble E et on considère le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}$.

Quelle est la probabilité que le carré de z soit un imaginaire pur ? ……. (une seule réponse, sans égalité)

IV. (4 points : 1 point + 2 points + 1 point)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne les points A, B, C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i} - 1$, $z_{\mathrm{B}} = 2 - \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{C}} = -2\mathrm{i}$.

Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (calcul en ligne).

………..……

Déterminer l'affixe du point D défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (1)$.
On attend une démarche par équivalences.

…………………………………………………………………………………………………….……………….

…………………………………………………………………………………………………….……………….

…………………………………………………………………………………………………….……………….

…………………………………………………………………………………………………….……………….

…………………………………………………………………………………………………….……………….

…………………………………………………………………………………………………….……………….

Donner sans explication l'affixe du point E, symétrique de B par rapport à l'axe des réels.

……… (une seule égalité)

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………………

Note : ….. / 20

Conseils à l’oral

II.

On attend les solutions sous forme algébrique.

IV.

On note $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ l’affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Corrigé de l'interrogation écrite du 8-11-2021

I.

Démontrer que le nombre $x=2-\frac{1}{11}\times\sqrt{1-\sqrt{\frac{25}{81}}}$ est un nombre rationnel puis donner sans expliquer son développement décimal (écrire une égalité).

Quelle est la nature du nombre $y=\frac{1}{x}$? Répondre avec précision en justifiant brièvement (une phrase suffira).

$x=\frac{64}{33}$ (la calculatrice permet d'obtenir très vite ce résultat ; sinon, on effectue les calculs à la main)

$$\begin{aligned}
x&=2-\frac{1}{11}\times\sqrt{1-\sqrt{\frac{25}{81}}}\\
&=2-\frac{1}{11}\times\sqrt{1-\frac{5}{9}}\\
&=2-\frac{1}{11}\times\sqrt{\frac{4}{9}}\\
&=2-\frac{1}{11}\times\frac{2}{3}\\
&=2-\frac{2}{33}\\
&=\frac{64}{33}
\end{aligned}$$

x est un nombre rationnel non décimal comme on le voit grâce au développement décimal (on peut aussi dire que $\frac{64}{33}$ est une fraction irréductible et que le dénominateur n'est pas de la forme $2^{\alpha}\times5^{\beta}$ avec α et β entiers naturels).

Il est inutile d'écrire $(64\,;33)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{*}$.

La calculatrice (ou une division à la main) donne $x=1,93\underline{93}...$ (période de 2 pour les décimales).

On a $y=\frac{33}{64}$.

La calculatrice (ou une division à la main) permet d'écrire $y=0,515625$.

On en déduit que y est un nombre décimal.

On peut aussi dire que $64=2^6$.

Le dénominateur de y est de la forme $2^{\alpha}\times5^{\beta}$ avec α et β entiers naturels donc y est un nombre décimal.

On peut aussi écrire $y=\frac{33}{2^6}=\frac{33\times5^6}{2^6\times5^6}=\frac{33\times5^6}{10^6}$. Cette dernière écriture fait apparaître y comme une fraction décimale.

II.

$S_1 = \varnothing$

$S_2 = \left\{ \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} \,;\, \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} \right\}$

$S_3 = \left\{ -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i} \right\}$

On considère les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$\dfrac{\mathrm{i}+z}{1-\mathrm{i}z} = \dfrac{1+\mathrm{i}z}{\mathrm{i}-z}$ (1) ; $\dfrac{z}{z^2+2} = 1$ (2) ; $\overline{\mathrm{i}z} = 2 + \mathrm{i}\left(1+\overline{z}\right)$ (3).

Compléter les égalités ci-contre donnant les ensembles de solutions respectifs S_1, S_2, S_3 de ces équations.

Rédiger complètement la résolution de deux équations au choix.

Pour les équations (1) et (2), on commencera par donner leur ensemble de résolution.

• Résolution de (1)

On doit avoir $1 - \mathrm{i}z \neq 0$ et $\mathrm{i} - z \neq 0$.

On résout donc les équations $1 - \mathrm{i}z = 0$ et $\mathrm{i} - z = 0$. On obtient respectivement – i et i pour solutions.

Le domaine de résolution de (1) est donc $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i} \,;\, -\mathrm{i}\}$.

$(1) \Leftrightarrow (\mathrm{i}+z)(\mathrm{i}-z) = (1+\mathrm{i}z)(1-\mathrm{i}z)$ (technique rapide du produit en croix)

$\Leftrightarrow \mathrm{i}^2 - z^2 = 1 - (\mathrm{i}z)^2$

$\Leftrightarrow -1 - z^2 = 1 + z^2$

$\Leftrightarrow z^2 = -1$

$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$

Ces deux valeurs ne peuvent être retenues car elles ne sont pas dans l'ensemble de résolution (ce sont des valeurs interdites).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \varnothing$.

• Résolution de (2)

On doit avoir $z^2 + 2 \neq 0$.

On résout donc l'équation $z^2 + 2 = 0$.

Cette équation est équivalent à $z^2 = -2$.

Les solutions sont $\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Le domaine de résolution de (2) est donc $\mathbb{C} \setminus \left\{\mathrm{i}\sqrt{2} \,;\, -\mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$.

$(2) \Leftrightarrow z = z^2 + 2$ (technique rapide du produit en croix)

$\Leftrightarrow z^2 - z + 2 = 0$ (équation du second degré à coefficients réels)

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ ou $z = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ (obtenues grâce au calcul du discriminant $\Delta = -7$, deux racines complexes conjuguées)

Les nombres $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ sont dans l'ensemble de résolution.

On en déduit que l'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = \left\{\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} ; \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right\}$.

• Résolution de (3)

Pour l'équation (3), on ne pose pas $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels. Ce serait une complication inutile.

$(3) \Leftrightarrow -\mathrm{i}\overline{z} = 2 + \mathrm{i} + \mathrm{i}\overline{z}$

$\Leftrightarrow -\mathrm{i}\overline{z} = 2 + \mathrm{i} + \mathrm{i}\overline{z}$

$\Leftrightarrow 0 = 2 + \mathrm{i} + 2\mathrm{i}\overline{z}$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{i}\overline{z} = -2 - \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{-2-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow \overline{z} = -\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\mathrm{i}} - \dfrac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow \overline{z} = -\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{z} = \mathrm{i} - \dfrac{1}{2}$ (on utilise l'égalité du cours $\dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$)

$\Leftrightarrow z = -\mathrm{i} - \dfrac{1}{2}$ (passage au conjugué)

On en déduit que l'ensemble des solutions de (3) est $S_3 = \left\{-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\right\}$.

On peut aussi passer au conjugué beaucoup plus tôt.

III.

On pose $\mathrm{E} = [\![-n\,;\,n]\!]$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On choisit un élément x au hasard dans l'ensemble E et on considère le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}$.

Quelle est la probabilité que le carré de z soit un imaginaire pur ? $\dfrac{2}{2n+1}$ (une seule réponse, sans égalité)

L'univers des possibles de l'expérience aléatoire est E. On munit cet espace d'une probabilité uniforme P (on est dans un cas d'équiprobabilité, tous les éléments de E ont la même probabilité d'être tirés).

On commence par chercher les $x \in \mathrm{E}$ tels que $z^2 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

On calcule d'abord $z^2 = x^2 - 1 + 2\mathrm{i}x$.

Cette égalité donne la forme algébrique de z^2. Elle fait apparaître la partie réelle et la partie imaginaire de z^2.

$$z^2 \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Les éléments x de E tels que $z^2 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ sont 1 et – 1.

On calcule le cardinal de E.

$\mathrm{card}\,\mathrm{E} = n - (-n) + 1 = 2n + 1$ (formule : $\mathrm{card}\left([\![a\,;\,b]\!]\right) = b - a + 1$ pour a et b entiers relatifs)

En appliquant la formule de Laplace, on obtient que la probabilité cherchée est égale à $\dfrac{2}{2n+1}$.

IV.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne les points A, B, C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i} - 1$, $z_{\mathrm{B}} = 2 - \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{C}} = -2\mathrm{i}$.

Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (calcul en ligne).

$z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = \left(2 - \mathrm{i}\right) - \left(\mathrm{i} - 1\right) = 3 - 2\mathrm{i}$

Déterminer l'affixe du point D défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (1)$.
On attend une démarche par équivalences.

$(1) \Leftrightarrow z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{C}} = 2\left(3 - 2\mathrm{i}\right)$

$\Leftrightarrow z_{\mathrm{D}} - \left(-2\mathrm{i}\right) = 6 - 4\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z_{\mathrm{D}} = 6 - 4\mathrm{i} - 2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z_{\mathrm{D}} = 6 - 6\mathrm{i}$

Donner sans explication l'affixe du point E, symétrique de B par rapport à l'axe des réels.

$$z_{\mathrm{E}} = 2 + \mathrm{i} \text{ (une seule égalité)}$$

On sait que $z_{\mathrm{E}} = \overline{z_{\mathrm{B}}}$.