T exp

Interrogation écrite du lundi 18 octobre 2021 (50 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (2 points)

Quelle est la nature du nombre $A=\sqrt{1-2\sqrt{1-\frac{8}{9}}}$? Justifier.

…….

…….

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

On considère l'ensemble $E=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$ et on définit les sous-ensembles $A=\{2\,;3\,;5\,;6\}$, $B=\{1\,;4\,;9\,;10\}$, $C=\{7\,;8\}$.

1°) Les sous-ensembles A, B, C forment-ils une partition de E ? Répondre par oui ou non sans justifier.

…… (une seule réponse)

2°) On choisit un nombre x au hasard dans E.

- Quelle est la probabilité que x soit dans A sachant que x^2 est dans B ? ……
- Quelle est la probabilité que x^2 soit dans B sachant que x est dans A ? ……

III. (2 points)

On choisit un élément x au hasard dans l'ensemble $E=\{-1\,;0\,;1\}$ et on pose $z=x+\mathrm{i}$.

Quelle est la probabilité que le carré de z soit un imaginaire pur ? ……. (une seule réponse, sans égalité)

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z^2+\mathrm{i}\overline{z'}=0$.

1°) Dans cette question, on suppose que $z'=4\mathrm{i}$. Quelles sont les valeurs possibles de z ?

…………………. (une seule réponse, sans égalités)

2°) Quelle égalité peut-on écrire ? Entourer la réponse exacte.

$z'=\mathrm{i}\overline{z}^2$ $\qquad$ $z'=\mathrm{i}z^2$ $\qquad$ $z'=-\mathrm{i}\overline{z}^2$ $\qquad$ $z'=-\mathrm{i}z^2$

V. (6 points : 1 point + 2 points + 3 points)

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $\frac{2\mathrm{i}z}{\overline{z}-\mathrm{i}}=1$ (1) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Quelle est la « valeur interdite » de (1) ? En déduire le domaine de résolution de (1).

……

……

On pose $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des réels. Exprimer $2\mathrm{i}z$ et $\overline{z}-\mathrm{i}$ en fonction de x et de y. On donnera les résultats sous forme algébrique.

……

……

Achever la résolution de (1) en présentant sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

……

……

……

……

……

……

VI. (1 point)

La solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $1-z=\mathrm{i}z$ est ……………… .

On écrira une seule réponse sous forme algébrique, sans égalité.

Corrigé de l'interrogation écrite du 18-10-2021

I.

Quelle est la nature du nombre $A=\sqrt{1-2\sqrt{1-\frac{8}{9}}}$? Justifier.

$A=\sqrt{1-2\sqrt{\frac{1}{9}}}=\sqrt{1-2\times\frac{1}{3}}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (on s'arrête là, inutile d'aller plus loin)

3 n'est pas un carré parfait donc $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel (propriété pour n entier naturel : « Si n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est un nombre irrationnel »).

On en déduit que A est un nombre irrationnel (propriété : « l'inverse d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel »).

On peut écrire $A\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des irrationnels, il s'agit du complémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Remarques :

• L'écriture $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ne permet pas de déterminer la nature de A.
En effet, le cours ne donne pas de propriété pour savoir si la racine carrée d'une fraction est un nombre rationnel.

• L'écriture $\frac{\sqrt{3}}{3}$ n'est pas utile pour donner la nature de A.

• Le début de l'écriture décimale de A fournie par la calculatrice ne permet pas de conclure.

II.

On considère l'ensemble $E=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$ et on définit les sous-ensembles $A=\{2\,;3\,;5\,;6\}$, $B=\{1\,;4\,;9\,;10\}$, $C=\{7\,;8\}$.

On peut écrire $E=[\![1\,;10]\!]$ (notation d'un intervalle d'entiers).

1°) Les sous-ensembles A, B, C forment-ils une partition de E ? Répondre par oui ou non sans justifier.

oui (une seule réponse)

En effet, A, B, C vérifient les trois conditions suivantes :
A, B, C sont non vides ;
$A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$ (ils sont deux à deux disjoints) ;
$A\cup B\cup C=E$ (leur réunion est l'ensemble E).

2°) On choisit un nombre x au hasard dans E.

• Quelle est la probabilité que x soit dans A sachant que x^2 est dans B ? $\frac{2}{3}$

• Quelle est la probabilité que x^2 soit dans B sachant que x est dans A ? $\frac{1}{2}$

Il s'agit de probabilités conditionnelles.
L'univers des possibles de l'expérience aléatoire est E. On munit cet espace d'une probabilité uniforme P (on est dans un cas d'équiprobabilité, tous les éléments de E ont la même probabilité d'être tirés).

• Probabilité que x soit dans A sachant que x^2 est dans B :

On a $B=\{1\,;4\,;9\,;10\}$. Il y a donc 3 éléments de E dont le carré est dans B (1, 2, 3).

Parmi ceux-ci, 2 sont dans A (puisque $A=\{2\,;3\,;5\,;6\}$).

La probabilité cherchée est donc $\frac{2}{3}$.

• Probabilité que x^2 soit dans B sachant que x est dans A :

On a $A=\{2\,;3\,;5\,;6\}$ et $B=\{1\,;4\,;9\,;10\}$.
Il y a 2 éléments de A dont le carré est dans B (2 et 3).

La probabilité cherchée est donc $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

On pourrait noter E l'événement : « $x^2\in B$ ».

On peut écrire $P\left(x\in A\,/\,x^2\in B\right)=\frac{2}{3}$ et $P\left(x^2\in B\,/\,x\in A\right)=\frac{1}{2}$.

III.

On choisit un élément x au hasard dans l'ensemble $E=\{-1\,;0\,;1\}$ et on pose $z=x+\mathrm{i}$.

Quelle est la probabilité que le carré de z soit un imaginaire pur ? $\frac{2}{3}$ (une seule réponse, sans égalité)

L'univers des possibles de l'expérience aléatoire est E. On munit cet espace d'une probabilité uniforme P (on est dans un cas d'équiprobabilité, tous les éléments de E ont la même probabilité d'être tirés).

On peut tester les carrés des différentes valeurs de z pour $x\in E$.

• Pour $x=-1$, on a $(-1+\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$ qui est un imaginaire pur.

• Pour $x=0$, on a $\mathrm{i}^2=-1$ qui est un réel.

• Pour $x=1$, on a $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$ qui est un imaginaire pur.

La probabilité cherchée est donc $\frac{2}{3}$.

Il est possible de procéder autrement en commençant par déterminer les réels x tels que $z^2 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

On commence par écrire $z^2 = x^2 - 1 + 2\mathrm{i}x$.

Cette égalité fait apparaître la partie réelle et la partie imaginaire de z^2.

$z^2 \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Les réels x tels que $z^2 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ sont 1 et – 1.

IV.

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z^2 + \mathrm{i}\overline{z'} = 0$.

1°) Dans cette question, on suppose que $z' = 4\mathrm{i}$. Quelles sont les valeurs possibles de z ?

2i ; – 2i (une seule réponse, sans égalités)

On utilise l'égalité $z^2 + \mathrm{i}\overline{z'} = 0 \quad (1)$ en remplaçant z' par 4i.

On a $\overline{z'} = -4\mathrm{i}$ (le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé).

(1) s'écrit donc $z^2 + \mathrm{i} \times (-4\mathrm{i}) = 0$ soit $z^2 + 4 = 0$ ou encore $z^2 = -4$.

On en déduit que $z = 2\mathrm{i}$ ou $z = -2\mathrm{i}$.

2°) Quelle égalité peut-on écrire ? Entourer la réponse exacte.

$z' = \mathrm{i}\overline{z}^2$ $\qquad$ $z' = \mathrm{i}z^2$ $\qquad$ $z' = -\mathrm{i}\overline{z}^2$ $\qquad$ $z' = -\mathrm{i}z^2$

$z' = -\mathrm{i}\overline{z}^2$

On utilise l'égalité $z^2 + \mathrm{i}\overline{z'} = 0 \quad (1)$.

On ne passe pas en forme algébrique (complication inutile).

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{i}\overline{z'} = -z^2$

$\Leftrightarrow \overline{z'} = -\dfrac{z^2}{\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow \overline{z'} = -\dfrac{z^2 \times \mathrm{i}}{\mathrm{i} \times \mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow \overline{z'} = -\dfrac{\mathrm{i}z^2}{-1}$

$\Leftrightarrow \overline{z'} = \mathrm{i}z^2$

$\Leftrightarrow \overline{\overline{z'}} = \overline{\mathrm{i}z^2}$

$\Leftrightarrow z' = \overline{\mathrm{i}} \times \overline{z^2}$

$\Leftrightarrow z' = -\mathrm{i}\overline{z}^2$

V.

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $\dfrac{2\mathrm{i}z}{\overline{z} - \mathrm{i}} = 1 \quad (1)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Quelle est la « valeur interdite » de (1) ? En déduire le domaine de résolution de (1).

On doit avoir $\overline{z} - \mathrm{i} \neq 0$ soit $\overline{z} \neq \mathrm{i}$ ce qui donne finalement $z \neq -\mathrm{i}$ (le conjugué de i est – i).
Le domaine de résolution de (1) est $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels. Exprimer 2iz et $\overline{z} - \mathrm{i}$ en fonction de x et de y. On donnera les résultats sous forme algébrique.

$2\mathrm{i}z = 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = 2\mathrm{i}x - 2y$ (ou $2\mathrm{i}z = -2y + 2\mathrm{i}x$ qui n'est pas mieux)

$\overline{z} - \mathrm{i} = x - \mathrm{i}y - \mathrm{i} = x - \mathrm{i}(y + 1)$

$2\mathrm{i}x - 2y$ est bien la forme algébrique de 2iz (car x et y étant des réels, 2x et – 2y le sont aussi ; la partie réelle de 2iz est – 2y, la partie imaginaire de 2iz est 2ix).

$x - \mathrm{i}(y + 1)$ est bien la forme algébrique de $\overline{z} - \mathrm{i}$ (car x et y étant des réels, $-(y + 1)$ est aussi un réel ; la partie réelle de $\overline{z} - \mathrm{i}$ est x, la partie imaginaire de $\overline{z} - \mathrm{i}$ est $-(y + 1)$).

On peut écrire : $2\mathrm{i}z = -2y + \mathrm{i}(2x)$ et $\overline{z} - \mathrm{i} = x + \mathrm{i}(-y - 1)$. Ces écritures sont un peu lourdes. Celles données dans les réponses ci-dessus sont préférables.

Achever la résolution de (1) en présentant sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

$(1) \Leftrightarrow 2\mathrm{i}z = \overline{z} - \mathrm{i}$ (on a effectué un produit en croix)

$\Leftrightarrow 2\mathrm{i}x - 2y = x - \mathrm{i}(y+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y = x \\ 2x = -(y+1) \end{cases}$ (par identification des parties réelles et imaginaires des deux membres)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 2(-2y) = -(y+1) \end{cases}$ (on résout le système linéaire par substitution)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -4y = -(y+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 4y = y+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow z = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{\mathrm{i}-2}{3}$ (on peut considérer cette écriture comme une forme algébrique)

$\dfrac{\mathrm{i}-2}{3}$ est différent de – i donc on peut retenir $\dfrac{\mathrm{i}-2}{3}$ comme solution.

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S = \left\{ \dfrac{\mathrm{i}-2}{3} \right\}$

On peut aussi résoudre le système à l'aide de la calculatrice.

VI.

La solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $1 - z = \mathrm{i}z$ est $\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$.

On écrira une seule réponse sous forme algébrique, sans égalité.

$(1) \Leftrightarrow 1 = z + \mathrm{i}z$

$\Leftrightarrow 1 = (1+\mathrm{i})z$ (on a factorisé le membre de droite par z)

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1 \times (1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i}) \times (1-\mathrm{i})}$ (on doit écrire z sous forme algébrique c'est-à-dire sous la forme $a + \mathrm{i}b$ où a et b sont des réels ; il ne doit donc pas y avoir de i au dénominateur)

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$

[$\Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ écriture pas forcément utile]

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S = \left\{ \dfrac{1-\mathrm{i}}{2} \right\}$

On pourrait laisser le résultat sous la forme d'un seul quotient.

L'écriture $\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$ est maladroite. L'écriture correcte est $\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$.
On peut éventuellement écrire $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.