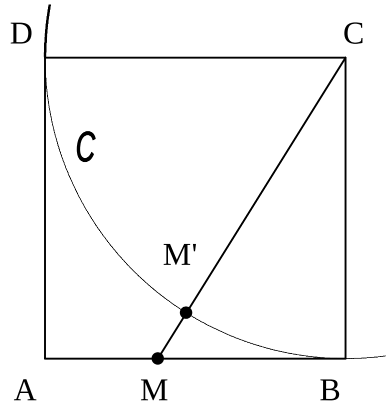
T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 15 octobre 2021

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………..……………………………

Note : ….. / 20



I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère un carré ABCD de côté 3. Soit M un point quelconque de $[AB]$.

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon 3 coupe $[CM]$ en M'. On pose $BM = x$.

1°) Exprimer MM' en fonction de *x*.

2°) Déterminer pour quelle valeur de *x* on a $MM' = 1$.

1°) ………………………… (une seule égalité) 2°) …… (une seule réponse sans égalité)

II. (2 points)

On considère l'équation $(m-2)x^2 - mx + m + 2 = 0$ (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et *m* un paramètre réel distinct de 2.

On admet que, pour tout réel $m \neq 2$, (E) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ et on note *S* la somme de leurs carrés.

Exprimer *S* en fonction de *m* sous la forme d'un seul quotient.

………………..……. (une seule égalité)

III. (1 point)

Soit *f* une fonction polynôme de degré *n* où *n* est un entier naturel supérieur ou égal 1.

Quel est le degré de la fonction f' ?

….. (une seule réponse, sans égalité)

IV. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points + 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - \ln x}$.

1°) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f* ?

…………….. (une seule égalité)

2°) On considère les fonctions $u : x \mapsto 1 - \ln x$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.

Compléter la phrase suivante : *f* est la composée de … suivie de … .

Facultatif : Compléter l'égalité en utilisant la notation symbolique d'une composée : $f =$............. .

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2$ (1) et l'inéquation $f(x) \geqslant 1$ (2).

On détaillera la résolution au choix de (1) ou de (2) et l'on donnera sans explication l'ensemble des solutions de l'autre.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - \dfrac{x}{3}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

2°) Déterminer l'abscisse du point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est horizontale.

1°) …………….... (une seule réponse, sans égalité) 2°) …… (une seule réponse, sans égalité)

VI. (2 points)

On considère les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto \ln(x-1) - \ln(x+1)$ et $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2-1}$ définies sur l'intervalle $I =]1\,;+\infty[$.

Démontrer que F est une primitive de f sur I.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

VII. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}$ le disque fermé de centre O et de rayon 2.

1°) Compléter la phrase suivante : $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(.....\,;.....)$ et de rayon …. .

2°) Compléter l'équivalence suivante où M est un point quelconque de P, de coordonnées $(x\,;y)$.

$$\mathrm{M} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \text{……………………..}$$

On attend une réponse utilisant les coordonnées x et y.

Bonus (question posée à l'oral)

On prend $x = 1$.

Le segment $[\mathrm{CM}]$ et l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ partagent l'intérieur du carré en 4 zones.

Calculer l'aire de chacune d'elles (valeur exacte).

Corrigé de l'interrogation écrite du 15-10-2021

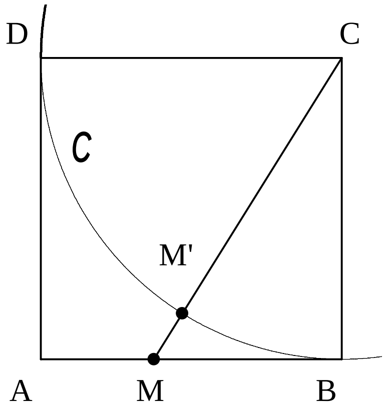
I.

On considère un carré ABCD de côté 3. Soit M un point quelconque de $[AB]$.

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon 3 coupe $[CM]$ en M'. On pose $BM = x$.

1°) Exprimer MM' en fonction de x.

2°) Déterminer pour quelle valeur de x on a $MM' = 1$.



1°) $MM' = \sqrt{x^2+9}-3$ (une seule égalité) 2°) $\sqrt{7}$ (une seule réponse sans égalité)

1°) On se place dans le triangle BMC rectangle en B.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $CM^2 = BM^2 + BC^2$ ce qui donne $CM^2 = x^2 + 9$.

Comme CM est une longueur, CM est positive ou nulle donc $CM = \sqrt{x^2+9}$.

De plus, $M' \in [CM]$ donc $CM = MM' + M'C$ soit $MM' = CM - CM'$.

Or $[CM']$ est un rayon du cercle $\mathcal{C}$ qui a pour rayon 3. On en déduit que $CM' = 3$.

Finalement, on obtient donc $MM' = \sqrt{x^2+9}-3$.

2°) On cherche x tel que $MM' = 1$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}-3=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}=4$

$\Leftrightarrow x^2+9=16$ (on élève au carré les deux membres qui sont positifs ou nuls)

$\Leftrightarrow x^2=7$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$ (impossible car x est un réel de l'intervalle $[0\,;3]$)

Or $\sqrt{7} \in [0\,;3]$ (en effet, $7<9$ donc $\sqrt{7}<\sqrt{9}$ soit $\sqrt{7}<3$).

On peut donc retenir $x=\sqrt{7}$.

II.

On considère l'équation $(m-2)x^2 - mx + m + 2 = 0$ (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et m un paramètre réel distinct de 2.

On admet que, pour tout réel $m \neq 2$, (E) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ et on note S la somme de leurs carrés.

Exprimer S en fonction de m sous la forme d'un seul quotient.

$$S=\frac{8-m^2}{(m-2)^2}\text{ (une seule égalité)}$$

Soit x' et x'' les racines de (E).

On a alors $S=(x')^2+(x'')^2$.

On peut écrire $S=(x'+x'')^2-2x'x''$.

D'après les formules donnant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, on a :

$x'+x''=-\frac{-m}{m-2}$ soit $x'+x''=\frac{m}{m-2}$ et $x'x''=\frac{m+2}{m-2}$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
S&=\left(\frac{m}{m-2}\right)^2-2\times\frac{m+2}{m-2}\\
&=\frac{m^2}{(m-2)^2}-\frac{2(m+2)}{m-2}\\
&=\frac{m^2}{(m-2)^2}-\frac{2(m+2)\times(m-2)}{(m-2)^2}\\
&=\frac{m^2}{(m-2)^2}-\frac{2(m^2-4)}{(m-2)^2}\\
&=\frac{m^2-2(m^2-4)}{(m-2)^2}\\
&=\frac{8-m^2}{(m-2)^2}
\end{aligned}$$

III.

Soit f une fonction polynôme de degré n où n est un entier naturel supérieur ou égal 1.
Quel est le degré de la fonction f' ?

$$n-1\text{ (une seule réponse, sans égalité)}$$

IV.

On considère la fonction $f: x\mapsto\sqrt{1-\ln x}$.

1°) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?

$$\mathcal{D}=\left]0\,;\,\text{e}\right]\text{ (une seule égalité)}$$

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leqslant 1$$

2°) On considère les fonctions $u : x \mapsto 1 - \ln x$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
Compléter la phrase suivante : *f* est la composée de *u* suivie de *v*.

Facultatif : Compléter l'égalité en utilisant la notation symbolique d'une composée : $f = v \circ u$.

Attention, il y a vraiment un ordre dans la composition des deux fonctions. Ici, il s'agit bien de *u* suivie de *v*.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2 \quad (1)$ et l'inéquation $f(x) \geqslant 1 \quad (2)$.
On détaillera la résolution au choix de (1) ou de (2) et l'on donnera sans explication l'ensemble des solutions de l'autre.

• Résolution de l'équation (1) :

On commence par donner l'ensemble de résolution de l'équation.

L'ensemble de résolution de (1) est $\boldsymbol{D}$ (ensemble de définition de *f*).

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1 - \ln x} = 2$

$\Leftrightarrow 1 - \ln x = 4$ (on élève au carré les deux membres qui sont positifs ou nuls)

$\Leftrightarrow \ln x = -3$

$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-3}$

Compte tenu de l'ensemble de résolution, on peut retenir e^{-3} pour solution.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \left\{\mathrm{e}^{-3}\right\}$

• Résolution de l'inéquation (2) :

On commence par donner l'ensemble de résolution de l'inéquation.

L'ensemble de résolution de (2) est $\mathcal{D}$ (ensemble de définition de *f*).

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{1-\ln x} \geqslant 1$

$\Leftrightarrow 1-\ln x \geqslant 1$ (on élève au carré les deux membres qui sont positifs ou nuls)

$\Leftrightarrow \ln x \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x \leqslant 1$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 =]0\,;1]$

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - \dfrac{x}{3}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

2°) Déterminer l'abscisse du point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est horizontale.

1°) 0 : 36 (une seule réponse, sans égalité)

2°) 9 (une seule réponse, sans égalité)

1°) On résout l'équation $f(x) = 0$ c'est-à-dire $2\sqrt{x} - \dfrac{x}{3} = 0$ (1).

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 6\sqrt{x} - x = 0 \\
&\Leftrightarrow 6\sqrt{x} - \sqrt{x} \times \sqrt{x} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(6 - \sqrt{x}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } 6 - \sqrt{x} = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = 6 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 36
\end{aligned}$$

On peut vérifier ce résultat sur l'écran de la calculatrice avec une fenêtre correcte.

2°) *f* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3}$ (on n'arrange pas le résultat).

On résout l'équation $f'(x) = 0$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3} = 0$ (2).

L’ensemble de résolution est l’intervalle $]0\,;+\infty[$.

$(2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=3$ (par passage à l’inverse)

$\Leftrightarrow x=9$

9 appartient bien à l’intervalle de résolution donc (2) admet une unique solution.

On en conclut que $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d’abscisse 9.

On peut vérifier ce résultat sur l’écran de la calculatrice avec une fenêtre correcte.

VI.

On considère les fonctions F : $x \mapsto \ln(x-1)-\ln(x+1)$ et $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2-1}$ définies sur l’intervalle $I=]1\,;+\infty[$.

Démontrer que F est une primitive de f sur I.

On commence le calcul directement sans faire de phrase introductive.
En revanche, on rédige une phrase de conclusion claire.

Pour la dérivée, il est préférable de faire le calcul avec la forme originale plutôt qu’avec la forme en un seul logarithme népérien : $\mathrm{F}(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

$\forall x \in I \quad \mathrm{F}'(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{1\times(x+1)-1\times(x-1)}{(x-1)(x+1)}$ (formule de mise au même dénominateur : $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad-bc}{bd}$)

$=\dfrac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{2}{x^2-1}$

$=f(x)$

On en déduit que F est une primitive de f sur I.

VII.

Dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ et $\mathcal{D}$ le disque fermé de centre O et de rayon 2.

1°) Compléter la phrase suivante : $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2\,;1)$ et de rayon 2.

Soit M un point quelconque de *P*, de coordonnées $(x\,;y)$.

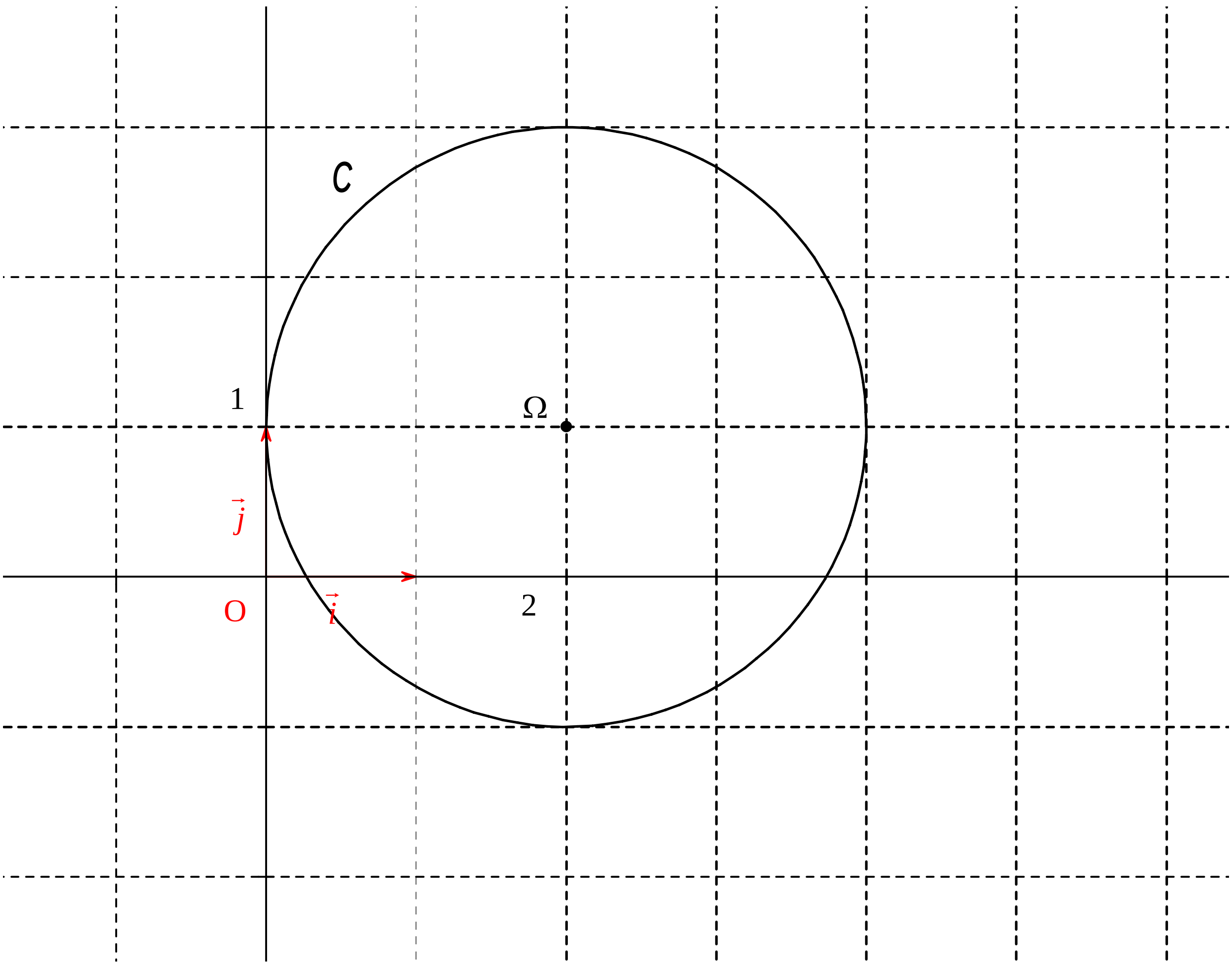
$$\text{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-2y+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-1)^2-1+1=0 \quad \text{(mise sous forme canonique)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=4$$

$\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre $\Omega(2\,;1)$ et de rayon 2.



On observe que la distance de Ω à l'axe des ordonnées est égale au rayon de $\mathcal{C}$ donc $\mathcal{C}$ est tangent à l'axe des ordonnées.

2°) Compléter l'équivalence suivante où M est un point quelconque de *P*, de coordonnées $\left(x\,;\,y\right)$.

$$\mathrm{M} \in \mathcal{D} \iff x^2 + y^2 \leqslant 4$$

ou

$$\mathrm{M} \in \mathcal{D} \iff \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 2$$

ou

$$\mathrm{M} \in \mathcal{D} \iff x^2 + y^2 - 4 \leqslant 0$$

On attend une réponse utilisant les coordonnées x et y.

On utilise la caractérisation sous forme d'une inéquation d'un disque fermé de centre $\mathrm{A}\left(a\,;\,b\right)$ et de rayon $R > 0$.

$$\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 \leqslant R^2$$

On peut aussi écrire $\sqrt{\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2} \leqslant R$.

Cette inéquation traduit en coordonnées la condition $\mathrm{AM} \leqslant R$.

On applique ce résultat avec $a = 0$ et $b = 0$ puisque le centre de $\mathcal{D}$ est le point O, origine du repère.

Bonus (question posée à l'oral)

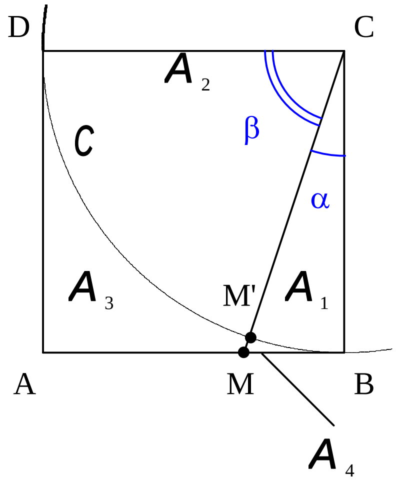
On prend $x = 1$.

Le segment $[CM]$ et l'arc de cercle $\overset{\frown}{BD}$ partagent l'intérieur du carré en 4 zones.

Calculer l'aire de chacune d'elles (valeur exacte).

On note $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$.

On note α et β les mesures en radians des angles $\widehat{BCM}$ et $\widehat{MCD}$.



On a $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ (dans le triangle BMC rectangle en B) d'où $\alpha = \text{Arctan}\,\frac{1}{3}$.

Par ailleurs, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (l'angle $\widehat{BCD}$ est droit car, par hypothèse, ABCD est un carré) d'où $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

On se souvient que l'aire d'un secteur circulaire dans un cercle de rayon r dont l'angle au centre a pour mesure α radians est égal à $\frac{r^2\theta}{2}$ (formule qui provient de l'aire d'un disque).

On a donc $\mathcal{A}_1 = \frac{3^2 \times \alpha}{2}$ soit $\mathcal{A}_1 = \frac{9\alpha}{2}$.

De la même manière, $\mathcal{A}_2 = \frac{9\beta}{2}$.

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_{\text{AMCD}} - \mathcal{A}_2 = \frac{15}{2} - \frac{9\beta}{2} = \frac{15 - 9\beta}{2}$$

AMCD est un trapèze (rectangle) ; on applique la formule donnant l'aire d'un trapèze

$$\frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$$

$$\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_{\text{BMC}} - \mathcal{A}_1 = \frac{3}{2} - \frac{9\alpha}{2} = \frac{3 - 9\alpha}{2}$$

On peut aussi écrire $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_{\text{ABCD}} - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$.