T exp

Interrogation écrite du lundi 4 octobre 2021 (20 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………….……………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

Quelle est la nature du nombre $A = 5 - \sqrt[3]{2 \times \sqrt{16}}$? Justifier.

………

………

II. (2 points)

Soit $P(x)$ une phrase portant sur un élément x d'un ensemble E.

Quelle est la négation de la proposition « $\forall x \in E \quad P(x)$ » ? ……………………………………………

III. (2 points)

On choisit au hasard un entier x dans l'ensemble $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$.

Quelle est la probabilité que $\dfrac{1}{x}$ soit un nombre décimal ? ……... (un seul résultat, sans égalité)

IV. (6 points : 2 points + 2 points + 2 points)

Soit x un réel positif ou nul. Indiquer dans la colonne de droite du tableau ci-dessous si l'implication de la colonne de gauche est vraie ou fausse (écrire uniquement les lettres V et F).

A : « Si x est un nombre rationnel, alors $\sqrt{x}$ est nombre rationnel »	
B : « Si $\sqrt{x}$ est un nombre rationnel, alors x est nombre rationnel »	
C : « Si x est un nombre irrationnel, alors $\sqrt{x}$ est nombre irrationnel »	
D : « Si $\sqrt{x}$ est un nombre irrationnel, alors x est nombre irrationnel »	

Application 1

Quelle est la nature du nombre $a = \ln 2$? Justifier à l'aide d'une propriété du cours.

Quelle est la nature du nombre $b = \sqrt{\ln 2}$? Justifier à l'aide de l'une des implications du tableau.

……

……

……

Application 2

On pose $c=\mathrm{e}^{\pi}$ (constante de Gelfond).
On admet que c est un nombre irrationnel (le mathématicien Alexandre Gelfond démontra même en 1929 qu'il s'agit d'un nombre transcendant).

Quelle est la nature du nombre $d=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$? Justifier à l'aide de l'une des implications du tableau.

……

……

……

Clin d'œil : Observer sur la calculatrice le début du développement décimal de $c-\pi$.

V. (4 points)

On pose $z=\mathrm{i}-1$ et $z'=z^2$. Recopier et compléter les égalités suivantes $\mathrm{Re}\,z=\ldots$, $\mathrm{Im}\,z=\ldots$, $\mathrm{Re}\,z'=\ldots$, $\mathrm{Im}\,z'=\ldots$.

……………....... ……………....... ……………....... …………….......

VI. (2 points : 1 point + 1 point)

Calculer $z_1=(1+\mathrm{i})^2(1-3\mathrm{i})$ et $z_2=3\times(2\mathrm{i})^3-\mathrm{i}^2$. On donnera les résultats sous forme algébrique.
Écrire seulement deux lignes de calcul et vérifier chacun des résultats à l'aide de la calculatrice.

……

……

VII. (2 points)

On pose $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$ où a, b, a', b' sont des réels.
Calculer zz' en donnant le résultat sous forme algébrique. On effectuera le calcul au brouillon.

…………………………………………….. (une seule égalité)

Corrigé de l'interrogation écrite du 4-10-2021

I.

Quelle est la nature du nombre $A = 5 - \sqrt[3]{2 \times \sqrt{16}}$? Justifier.

$A = 5 - \sqrt[3]{2 \times 4} = 5 - \sqrt[3]{8} = 5 - 2 = 3$ donc A est un entier naturel.

On peut aussi écrire $A = 5 - \sqrt[3]{2 \times 4} = 5 - \sqrt[3]{2 \times 2^2} = 5 - \sqrt[3]{2^3} = 5 - 2 = 3$.

II.

Soit $P(x)$ une phrase portant sur un élément *x* d'un ensemble *E*.

Quelle est la négation de la proposition « $\forall x \in E \quad P(x)$ » ? « $\exists x \in E$ / non $P(x)$ »

III.

On choisit au hasard un entier *x* dans l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.

Quelle est la probabilité que $\frac{1}{x}$ soit un nombre décimal ? $\frac{3}{5}$ (un seul résultat, sans égalité)

On peut modéliser l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité (tous les éléments de *E* ont la même probabilité d'être choisis).

On peut tester chaque élément de *E*.

$\frac{1}{1} = 1$ est un entier naturel donc un nombre décimal.

$\frac{1}{2} = 0,5$ est un nombre décimal.

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

$\frac{1}{4} = 0,25$ est un nombre décimal.

$\frac{1}{5} = 0,2$ est un nombre décimal.

$\frac{1}{6}$ n'est pas un nombre décimal.

$\frac{1}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

$\frac{1}{8} = 0,125$ est un nombre décimal.

$\frac{1}{9}$ n'est pas un nombre décimal.

$\frac{1}{10} = 0,1$ est un nombre décimal.

Comme il s'agit de fractions irréductibles, on peut aussi appliquer la règle du cours directement en gardant les nombres *x* qui s'écrivent sous la forme $2^{\alpha} \times 5^{\beta}$ avec α et β entiers naturels (produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5, avec des exposants entiers naturels).

Il y a donc 6 entiers de E dont l'inverse est un nombre décimal.

On en déduit que la probabilité cherchée est $\dfrac{6}{10}=0,6$ ou $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

IV.

Soit x un réel positif ou nul. Indiquer dans la colonne de droite du tableau ci-dessous si l'implication de la colonne de gauche est vraie ou fausse (écrire uniquement les lettres V et F).

A : « Si x est un nombre rationnel, alors $\sqrt{x}$ est nombre rationnel »	F
B : « Si $\sqrt{x}$ est un nombre rationnel, alors x est nombre rationnel »	V
C : « Si x est un nombre irrationnel, alors $\sqrt{x}$ est nombre irrationnel »	V
D : « Si $\sqrt{x}$ est un nombre irrationnel, alors x est nombre irrationnel »	F

On peut dire que A, B, C, D sont des « implications sous quantification universelle ».

B est la réciproque de A.
D est la contraposée de A.
C est la contraposée de B.

Il facile de démontrer que B est vraie.

En effet, si $\sqrt{x}$ est un nombre rationnel, alors $\sqrt{x}=\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels, q étant non nul.

On a alors $x=\left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ d'où $x=\dfrac{p^2}{q^2}$. On en déduit que x est un nombre rationnel.

On sait qu'une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité.

Application 1

Quelle est la nature du nombre $a=\ln 2$? Justifier à l'aide d'une propriété du cours.
Quelle est la nature du nombre $b=\sqrt{\ln 2}$? Justifier à l'aide de l'une des implications du tableau.

a est un nombre irrationnel d'après la propriété « Si x est un nombre rationnel strictement positif distinct de 1, $\ln x$ est un nombre irrationnel » (propriété importante admise dans le cours). On peut même dire que a est un nombre transcendant.

Remarque : L'affichage de a sur la calculatrice ne perme pas de dire que a est un nombre irrationnel.

De plus, a est strictement positif donc, d'après l'implication C, b est donc un nombre irrationnel.

Application 2

On pose $c=\mathrm{e}^{\pi}$ (constante de Gelfond).
On admet que c est un nombre irrationnel (le mathématicien Alexandre Gelfond démontra même en 1929 qu'il s'agit d'un nombre transcendant).

Quelle est la nature du nombre $d=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$? Justifier à l'aide de l'une des implications du tableau.

On peut écrire $d=\sqrt{e^{\pi}}$ donc $d=\sqrt{c}$.
Comme c est un nombre irrationnel positif, l'implication C permet d'affirmer que d est un nombre irrationnel.

Clin d'œil : Observer sur la calculatrice le début du développement décimal de $c-\pi$.

$c-\pi$ est presque un entier. Le début du développement décimal de ce nombre contient en effet beaucoup de 9.
C'est une curiosité mathématique qui a bien étonné les mathématiciens.

V.

On pose $z=\mathrm{i}-1$ et $z'=z^2$. Recopier et compléter les égalités suivantes $\mathrm{Re}\,z=\ldots$, $\mathrm{Im}\,z=\ldots$, $\mathrm{Re}\,z'=\ldots$, $\mathrm{Im}\,z'=\ldots$.

$$\mathrm{Re}\,z=-1 \qquad \mathrm{Im}\,z=1 \qquad \mathrm{Re}\,z'=0 \qquad \mathrm{Im}\,z'=-2$$

On a $z'=-2\mathrm{i}$.

z' est un imaginaire pur.

VI.

Calculer $z_1=(1+\mathrm{i})^2(1-3\mathrm{i})$ et $z_2=3\times(2\mathrm{i})^3-\mathrm{i}^2$. On donnera les résultats sous forme algébrique.
Écrire seulement deux lignes de calcul et vérifier chacun des résultats à l'aide de la calculatrice.

$z_1=2\mathrm{i}(1-3\mathrm{i})$ $=6+2\mathrm{i}$	$z_2=3\times(-8\mathrm{i})-(-1)$ $=1-24\mathrm{i}$

On vérifie les résultats à l'aide de la calculatrice.

VII.

On pose $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$ où a, b, a', b' sont des réels.
Calculer zz' en donnant le résultat sous forme algébrique. On effectuera le calcul au brouillon.

$$zz'=aa'-bb'+\mathrm{i}(ab'+a'b) \quad \text{(une seule égalité)}$$