T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 17 septembre 2021

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….…………………………………

Note : ….. / 20

Écrire très lisiblement, sans ratures et sans utiliser d'abréviations.
Ne rien surligner, ne rien écrire en dehors de ce qui est demandé.

I. (3 points)

On considère les expressions $A=\left(e^{x-1}\right)^2$, $B=\dfrac{1}{e^{2-2x}}$, $C=\dfrac{e^{5+x}}{e^{3-x}}$, $D=\dfrac{\left(e^{2-2x}\right)^2\times e^{5x-6}}{e^{-x}}$ où x est un réel quelconque.

Parmi celles-ci, trois sont égales. Indiquer lesquelles. ………………………… (lettres uniquement)
Justifier par des calculs sur les lignes ci-dessous. On pourra séparer en quatre colonnes.

………..

………..

………..

II. (4 points : 1 point par réponse)

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

Compléter directement sans justifier.

- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)\times e=1$ sont ……………………… .

- $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=$……………………

- $\forall x\in\mathbb{R}$ $\dfrac{f(x)}{f(x-1)}=$………. (résultat sous la forme d'une seule exponentielle)

- $f\left(\sqrt{\ln 3}\right)=$………. (résultat sous la forme la plus simple possible)

Justifier le résultat de ce dernier calcul sur la ligne ci-dessous.

………..

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………………

III. (9 points : 1°) 2 points + 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère les fonctions $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{2x}$ et $g : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{2x}$.

1°) Faire ci-dessous les tableaux de signes de $f(x)$ et de $g(x)$ sans explication.

2°) Compléter les égalités suivantes :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \times g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (résultat sous la forme la plus simple)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad [f(x)]^2 - [g(x)]^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (résultat sous la forme la plus simple)

3°) Vrai ou faux ?

$\exists x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) = g(x)$ ……..

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < g(x)$ ……..

4°) Compléter directement sans justifier.

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2f(x) + g(x) = 1$ est …………………. .

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points) Questions de cours

1°) Compléter directement : $\mathrm{e}^{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ldots\ldots$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{\mathrm{e}^{x}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2°) Soit a un réel. On note S l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{e}^{x} = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- Si ………, alors $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Si ………, alors $S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Corrigé de l'interrogation écrite du 17-9-2021

I.

On considère les expressions $\mathrm{A}=\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^2$, $\mathrm{B}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2-2x}}$, $\mathrm{C}=\dfrac{\mathrm{e}^{5+x}}{\mathrm{e}^{3-x}}$, $\mathrm{D}=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{2-2x}\right)^2\times\mathrm{e}^{5x-6}}{\mathrm{e}^{-x}}$ où x est un réel quelconque.

Parmi celles-ci, trois sont égales. Indiquer lesquelles. A, B, D (lettres uniquement)
Justifier par des calculs sur les lignes ci-dessous. On pourra séparer en quatre colonnes.

$\mathrm{A}=\mathrm{e}^{2(x-1)}$	$\mathrm{B}=\mathrm{e}^{-(2-2x)}$	$\mathrm{C}=\mathrm{e}^{(5+x)-(3-x)}$	$\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{e}^{4-4x}\times\mathrm{e}^{5x-6}}{\mathrm{e}^{-x}}$
$=\mathrm{e}^{2x-2}$	$=\mathrm{e}^{2x-2}$	$=\mathrm{e}^{2x+2}$	$=\mathrm{e}^{4-4x+5x-6+x}$
			$=\mathrm{e}^{2x-2}$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Compléter directement sans justifier.

- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)\times\mathrm{e}=1$ sont 1 et – 1.

On résout l'équation $f(x)\times\mathrm{e}=1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2}\times\mathrm{e}=1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2}\times\mathrm{e}^1=1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{1-x^2}=1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{1-x^2}=\mathrm{e}^0$

$\Leftrightarrow 1-x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2=1$

$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \dfrac{f(x)}{f(x-1)} = \mathrm{e}^{1-2x}$ (résultat sous la forme d'une seule exponentielle)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{f(x)}{f(x-1)} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\mathrm{e}^{-(x-1)^2}}$$

$$= \mathrm{e}^{(x-1)^2 - x^2}$$

$$= \mathrm{e}^{x^2-2x+1-x^2}$$

$$= \mathrm{e}^{-2x+1}$$

$$= \mathrm{e}^{1-2x}$$

- $f\left(\sqrt{\ln 3}\right) = \dfrac{1}{3}$ (résultat sous la forme la plus simple possible)

Justifier le résultat de ce dernier calcul sur la ligne ci-dessous.

$$f\left(\sqrt{\ln 3}\right) = \mathrm{e}^{-\left(\sqrt{\ln 3}\right)^2} = \mathrm{e}^{-\ln 3} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 3}} = \frac{1}{3}$$

III.

On considère les fonctions $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{2x}$ et $g : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{2x}$.

1°) Faire ci-dessous les tableaux de signes de $f(x)$ et de $g(x)$ sans explication.

Pour déterminer le signe $f(x)$ suivant les valeurs de *x*, on doit résoudre deux inéquations et une équation.

$f(x) > 0 \quad (1)$	$f(x) < 0 \quad (2)$	$f(x) = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{2x} > 0$	$(2) \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{2x} < 0$	$(3) \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{2x} = 0$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} < 1$	$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} > 1$	$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = 1$
$\Leftrightarrow 2x < 0$	$\Leftrightarrow 2x > 0$	$\Leftrightarrow 2x = 0$
$\Leftrightarrow x < 0$	$\Leftrightarrow x > 0$	$\Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	–	

On vérifie sur la calculatrice en traçant la représentation graphique de *f*.

On peut aussi prendre des valeurs tests.

Le signe de $g(x)$ est évident : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		+	

On vérifie sur la calculatrice en traçant la représentation graphique de *g*.

2°) Compléter les égalités suivantes :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \times g(x) = 1 - \mathrm{e}^{4x}$ (résultat sous la forme la plus simple)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2 = -4\mathrm{e}^{2x}$ (résultat sous la forme la plus simple)

Dans les deux cas, on développe par identité remarquable.

3°) Vrai ou faux ?

$\exists x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = g(x)$ Faux

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < g(x)$ Vrai

● Pour savoir si la proposition « $\exists x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = g(x)$ » est vraie ou fausse, on cherche s'il existe un réel x tel que $f(x) = g(x)$.

On résout donc l'équation $f(x) = g(x) \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{2x} = 1 + \mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = 0$ (impossible)

● Pour savoir si la proposition « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < g(x)$ » est vraie ou fausse, on peut regarder les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, il apparaît clairement que l'inégalité est vraie pour tout réel *x*.

On peut aussi dire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad -\mathrm{e}^{2x} < \mathrm{e}^{2x}$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{2x} > 0$.

En ajoutant 1 aux deux membres de cette inégalité, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - e^{2x} < 1 + e^{2x}$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < g(x)$.

4°) Compléter directement sans justifier.

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -2e^{2x}$

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 2e^{2x}$

• L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2f(x) + g(x) = 1$ est $\left\{\dfrac{\ln 2}{2}\right\}$.

L'équation $2f(x) + g(x) = 1$ s'écrit $2\left(1 - e^{2x}\right) + \left(1 + e^{2x}\right) = 1 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 3 - e^{2x} = 1 \\
&\Leftrightarrow e^{2x} = 2 \\
&\Leftrightarrow 2x = \ln 2 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

On verra dans le chapitre sur la fonction logarithme népérien que $\dfrac{\ln 2}{2} = \ln\sqrt{2}$ (propriété : $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\sqrt{a} = \dfrac{\ln a}{2}$).

IV.

1°) Compléter directement : $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$

2°) Soit a un réel. On note S l'ensemble des solutions de l'équation $e^x = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

• Si $a > 0$, alors $S = \{\ln a\}$.

• Si $a \leqslant 0$, alors $S = \varnothing$.