$1^{\text{ère}}$ S1 — Devoir pour le jeudi 25 avril 2013

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $r_n = u_{n+1} - 3u_n$.

a) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique ; déterminer sa raison et son premier terme.

b) En déduire l'expression de r_n en fonction de *n*.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $s_n = u_{n+1} - 2u_n$.

a) Démontrer que la suite (s_n) est géométrique ; déterminer sa raison et son premier terme.

b) En déduire l'expression de s_n en fonction de *n*.

3°) À l'aide des deux questions précédentes, exprimer u_n en fonction de *n*.

4°) Pour tout entier naturel *n*, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Donner une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

Corrigé du DM pour le 25-4-2013

$$(u_n)\quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

1°) $r_n = u_{n+1} - 3u_n$

a) **Démontrons que la suite (r_n) est géométrique.**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} r_{n+1} &= u_{n+2} - 3u_{n+1} \\ &= 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1} \\ &= 2u_{n+1} - 6u_n \\ &= 2\left(u_{n+1} - 3u_n\right) \\ &= 2r_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (r_n) est géométrique de premier terme $r_0 = u_1 - 3u_0 = 1 - 3 \times 0 = 1$ et de raison $q = 2$.

b) **En déduire l'expression de r_n en fonction de n.**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} r_n &= r_0 \times 2^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

2°) $s_n = u_{n+1} - 2u_n$

a) **Démontrons que la suite (s_n) est géométrique.**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} s_{n+1} &= u_{n+2} - 2u_{n+1} \\ &= 5u_{n+1} - 6u_n - 2u_{n+1} \\ &= 3u_{n+1} - 6u_n \\ &= 3\left(u_{n+1} - 2u_n\right) \\ &= 3s_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (s_n) est géométrique de premier terme $s_0 = u_1 - 2u_0 = 1 - 2 \times 0 = 1$ et de raison $q' = 3$.

b) **En déduire l'expression de r_n en fonction de n.**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} s_n &= s_0 \times 3^n \\ &= 3^n \end{aligned}$$

3°) **Exprimons u_n en fonction de *n*.**

On a : $\begin{cases} u_{n+1} - 3u_n = 2^n \\ u_{n+1} - 2u_n = 3^n \end{cases}$.

Donc par soustraction membre à membre (deuxième équation moins la première), on obtient :

$u_n = 3^n - 2^n$

En fait, $u_n = s_n - r_n$

4°) $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Donnons une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\ &= (r_0 - s_0) + (r_1 - s_1) + ... + (r_n - s_n) \\ &= (r_0 + r_1 + ... + r_n) - (s_1 + s_2 + ... + s_n) \\ &= 1 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} - 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} - (2^{n+1} - 1) \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} - 2^{n+1} + 1 \\ &= \frac{3^{n+1} - 2^{n+1} + 1}{2} \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le symbole Σ :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_i$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} (s_k - r_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} s_k - \sum_{k=0}^{k=n} r_k$$

etc.