T1 spécialité

Contrôle du jeudi 6 mai 2021

Durée : 50 minutes
- Fiche autorisée
- Calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom : …………….……………………………….**

Note : ….. / 20

I. (6 points)

Calculer la valeur exacte des intégrales $I_1 = \int_0^{\ln 3} e^{2x-1}\,dx$ et $I_2 = \int_1^{e} \left(\frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx$.

Justifier que $I_1 = I_2$.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

II. (4 points : 2 points + 2 points)

Calculer la valeur exacte des intégrales $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,dx$ et $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \times \cos^5 x\,dx$.

Pour I_4, on utilisera la formule $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ valable pour tout réel x.
On détaillera uniquement le calcul de l'une des intégrales au choix et l'on donnera le résultat de l'autre sans justifier.

………..

………..

………..

………..

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $D = \mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Quelle est l'abscisse du point K de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 2 ? ………. (une seule égalité)

2°) On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $I = [1 ; 2]$ en unité d'aire.
On ne cherchera pas à calculer $\mathcal{A}$.
Déterminer brièvement le maximum et le minimum de f sur I ; en déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

……..

……..

……..

……..

Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième de $\mathcal{A}$. ....….. (un seul résultat sans égalité)

3°) Soit y un réel strictement positif quelconque différent de 1.
Déterminer le(s) réel(s) x de D tel(s) que $f(x) = y$. ……………

Dans les exercices **IV** et **V**, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Pour tout réel m, on note S_m l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + m = 0$.

1°) Déterminer l'ensemble des réels m tels que S_m soit une sphère.
2°) Pour quelle valeur de m le point $\mathrm{I}(0 ; 1 ; 3)$ appartient-il à S_m ?

1°) ………………………..……. 2°) ………

V. (2 points)

On note A et B les points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives $(1 ; 1 ; 0)$ et $(4 ; 2 ; -1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de diamètre $[\mathrm{AB}]$.

…………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 6-5-2021

I.

Calculer la valeur exacte des intégrales $I_1=\int_0^{\ln 3} e^{2x-1}\,dx$ et $I_2=\int_1^{e}\left(\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$.

Justifier que $I_1=I_2$.

$$I_1=\int_0^{\ln 3} e^{2x-1}\,dx$$

$$=\left[\frac{e^{2x-1}}{2}\right]_0^{\ln 3}$$

$$=\frac{e^{2\ln 3-1}}{2}-\frac{e^{2\times 0-1}}{2}$$

$$=\frac{e^{2\ln 3}\times e^{-1}-e^{-1}}{2}$$

$$=\frac{\left(e^{\ln 3}\right)^2\times e^{-1}-e^{-1}}{2}$$

$$=\frac{9\times e^{-1}-e^{-1}}{2}$$

$$=\frac{8e^{-1}}{2}$$

$$=4e^{-1}$$

$$=\frac{4}{e}$$

$$I_2=\int_1^{e}\left(\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$$

$$=4\int_1^{e}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=4\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^{e}$$

$$=4\left[\left(1+\frac{1}{e}\right)-1\right]$$

$$=\frac{4}{e}$$

On constate que $I_1=I_2$.

Remarque : On a utilisé des valeurs exactes de I_1 et I_2 et non des valeurs approchées.

II.

Calculer la valeur exacte des intégrales $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,dx$ et $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\times\cos^5 x\,dx$.

Pour I_4, on utilisera la formule $\sin 2x=2\sin x\cos x$ valable pour tout réel x.

On détaillera uniquement le calcul de l'une des intégrales au choix et l'on donnera le résultat de l'autre sans justifier.

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[2\sqrt{2+\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2+\cos\frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{2+\cos 0}$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \times \cos^5 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x \times\times \cos x \times \cos^5 x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \times \cos^6 x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\left[-\frac{\cos^7 x}{7}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \qquad (u'u^n)$$

$$= -\frac{2}{7}\left(\cos^7\frac{\pi}{4} - \cos^7 0\right)$$

$$= -\frac{2}{7}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7 - (\cos 0)^7\right]$$

$$= \frac{16-\sqrt{2}}{56}$$

On peut écrire $I_4 = \frac{2}{7} - \frac{\sqrt{2}}{56}$.

On peut vérifier ces valeurs en utilisant la calculatrice.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $D = \mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Quelle est l'abscisse du point K de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 2 ? $x_K = \frac{1}{\ln 2}$ (une seule égalité)

On résout dans D l'équation $f(x) = 2 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln 2$ (possible car 2 strictement positif par hypothèse)

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$ (possible car $\ln 2 \neq 0$)

On vérifie que $\dfrac{1}{\ln 2} \in D$.

2°) On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $I = [1\,;\,2]$ en unité d'aire.
On ne cherchera pas à calculer $\mathcal{A}$.
Déterminer brièvement le maximum et le minimum de f sur I ; en déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

On procède par encadrements successifs.

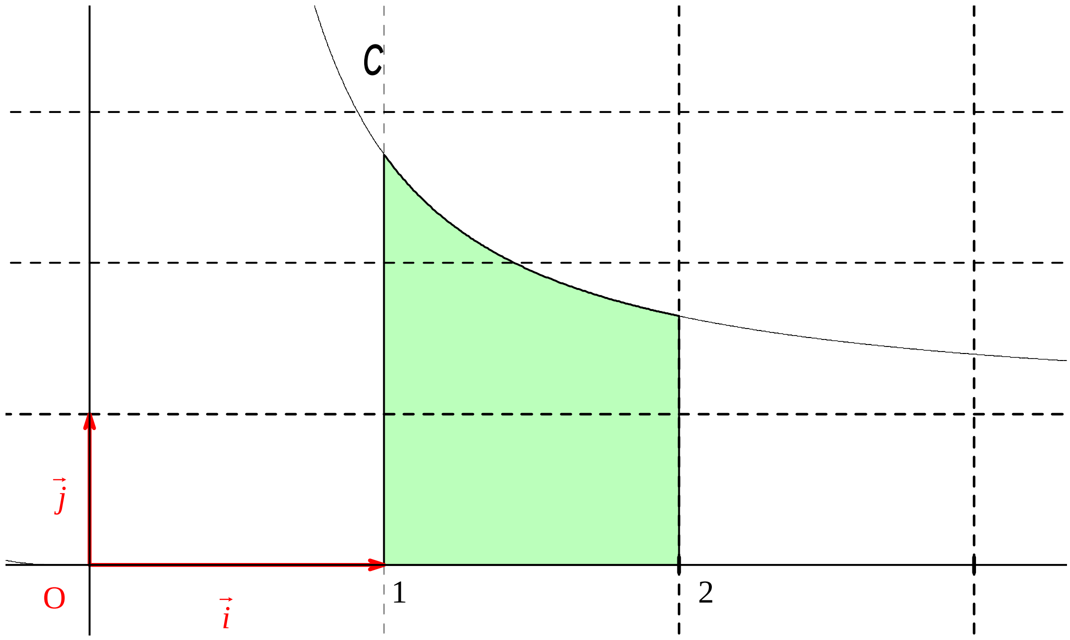
$\forall x \in I \quad \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$ donc $\forall x \in I \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \mathrm{e}^{1}$ (passage à l'exponentielle) soit $\forall x \in I \quad \sqrt{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}$.

Or $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\mathrm{e}}$ ou $f(1) = \mathrm{e}$ donc le maximum de f sur I est e et le minimum de f sur I est $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Autre méthode :

On étudie le sens de variation de f sur I.
La fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;+\infty[$.
f est la composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle.
On en déduit que f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;+\infty[$.
Par restriction, f est strictement décroissante sur I.
On en déduit que le maximum f sur I est $f(1) = \mathrm{e}$ et le minimum de f sur I est $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\mathrm{e}}$.

On peut aussi dériver f : $\forall x \in D \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On observe que cette dérivée est strictement négative donc f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;+\infty[$.

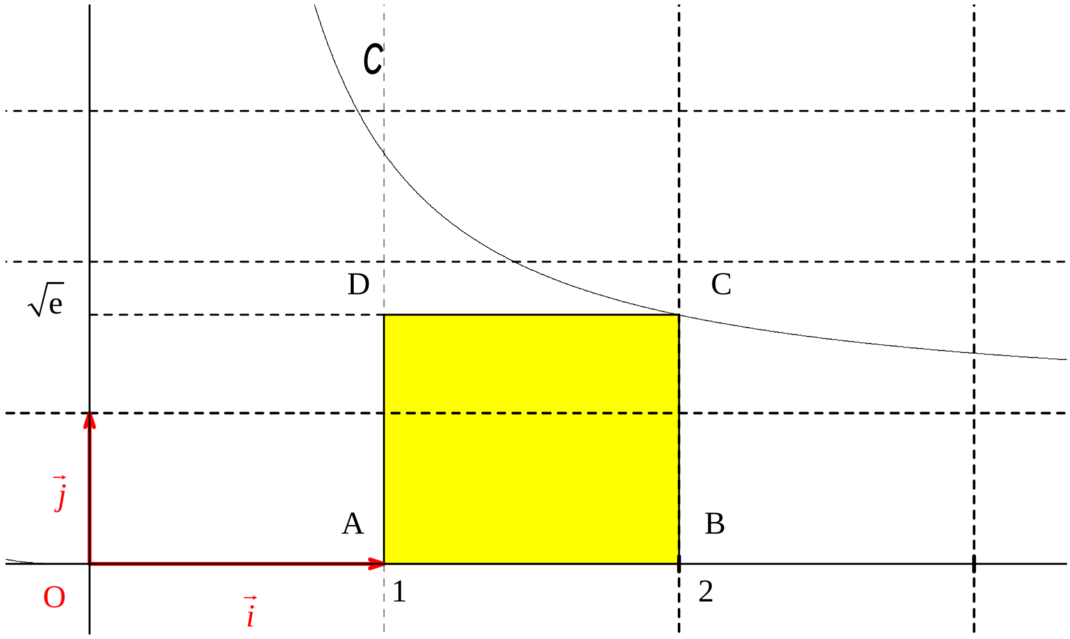


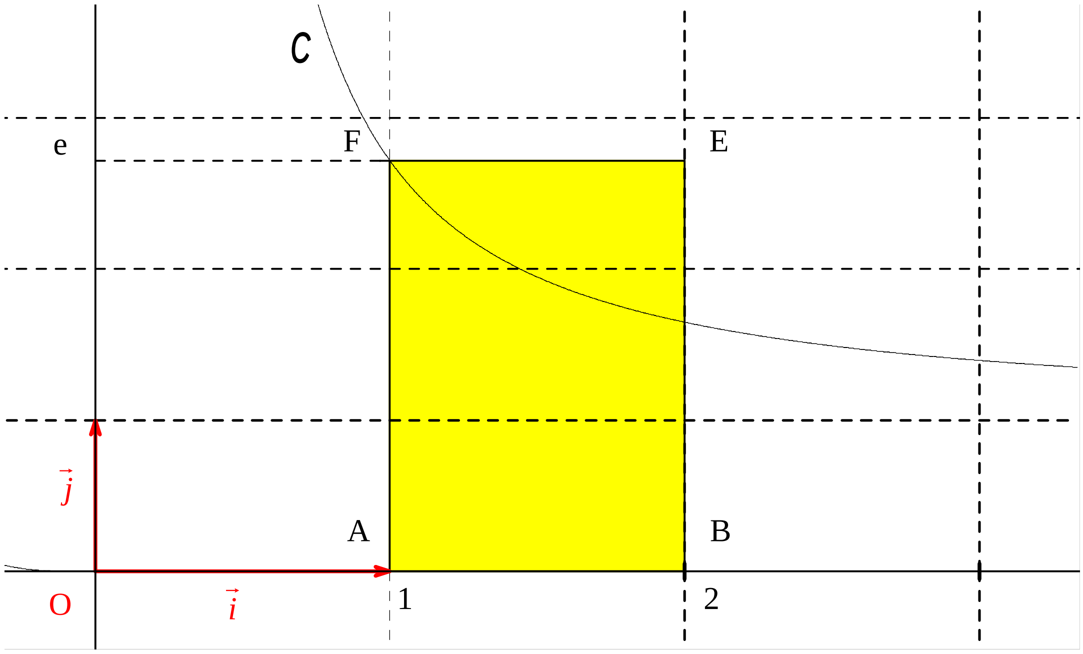
On cherche un encadrement de $\mathcal{A}$.

1ère méthode : sans intégrale

On observe tout d'abord que *f* est à valeurs strictement positives sur *D*.
La courbe $\mathcal{C}$ est donc située au-dessus de l'axe des abscisses.

$\mathcal{A}$ est donc comprise entre l'aire du « rectangle formé par le minimum de *f* sur *I* » (rectangle ABCD) et l'aire du « rectangle formé par le maximum de *f* sur *I* » (rectangle ABEF).





On calcule les aires des deux rectangles.

Le premier rectangle a pour aire $1 \times \sqrt{e} = \sqrt{e}$ (en unité d'aire).

Le deuxième rectangle a pour aire $1 \times e = e$ (en unité d'aire).

On a donc $\sqrt{e} \leqslant \mathcal{A} \leqslant e$.

2^e^ méthode : avec intégrale

On peut écrire $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

On sait que $\forall x \in I \quad \sqrt{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}$.

Par croissance de l'intégrale (comme les bornes sont rangées dans le « bon sens »), on a :

$$\int_1^2 \sqrt{\mathrm{e}}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 \mathrm{e}\ \mathrm{d}x.$$

On a donc $(2-1)\sqrt{\mathrm{e}} \leqslant \mathcal{A} \leqslant (2-1)\mathrm{e}$ soit $\sqrt{\mathrm{e}} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \mathrm{e}$.

On peut démontrer que les inégalités sont en fait strictes (avec une propriété qui sera vue dans le supérieur).

Il est également possible d'utiliser l'inégalité de la moyenne (encadrement de la valeur moyenne d'une fonction).

Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième de $\mathcal{A}$. 2,020 (un seul résultat sans égalité)

Cette valeur est en accord avec l'encadrement de $\mathcal{A}$ trouvé précédemment.

3°) Soit y un réel strictement positif quelconque différent de 1.

Déterminer le(s) réel(s) x de D tel(s) que $f(x) = y$. $x = \dfrac{1}{\ln y}$

On résout dans D l'équation $f(x) = y \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = y$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \ln y$ (possible car y strictement positif par hypothèse)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\ln y}$ (possible car $y \neq 1$ par hypothèse donc $\ln y \neq 0$)

On vérifie que $\dfrac{1}{\ln y} \in D$.

Dans les exercices **IV** et **V**, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

IV.

Pour tout réel m, on note S_m l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + m = 0$.

1°) Déterminer l'ensemble des réels m tels que S_m soit une sphère.

2°) Pour quelle valeur de m le point $\mathrm{I}(0\,;1\,;3)$ appartient-il à S_m ?

1°) $]-\infty\,;3[$ 2°) -2

1°) Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\ ;y\ ;z)$.

$$\text{M} \in S_m \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-3+m=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3-m$$

Pour que S_m soit une sphère, il faut et il suffit que $3-m>0$ soit $m<3$.

Remarque : Dans ce cas, S_m est la sphère de centre $\Omega(1\,;1\,;1)$ et de rayon $\sqrt{3-m}$.

2°) On rédige par équivalences.

$$\text{I} \in S_m \Leftrightarrow 0^2+1^2+3^2-2\times 0-2\times 1-2\times 3+m=0$$

$$\Leftrightarrow 2+m=0$$

$$\Leftrightarrow m=-2$$

V.

On note A et B les points de $\mathcal{E}$ de coordonnées respectives $(1\,;1\,;0)$ et $(4\,;2\,;-1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de diamètre $[\text{AB}]$.

$$x^2+y^2+z^2-5x-3y+z+6=0$$

Il y a deux méthodes différentes.

1ère méthode : en utilisant l'orthogonalité

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\text{M} \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}}=0$$
$$\Leftrightarrow \ldots$$
$$\Leftrightarrow \ldots$$

2e méthode : en utilisant le centre et le rayon de S

On calcule la distance AB et les coordonnées du milieu I de [AB].
Cette méthode est à éviter.

On utilise donc la première méthode de préférence car elle présente moins de calculs.

1ère méthode :

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

$$\mathrm{M} \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0 \quad \text{(ligne qu'il est possible de sauter)}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4)+(y-1)(y-2)+(z-0)(z+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 + y^2 - 3y + 2 + z^2 + z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 3y + z + 6 = 0$$

Une équation cartésienne de S s'écrit $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 3y + z + 6 = 0$.

2e méthode :

Une équation de S s'écrit $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$.

En développant le premier membre et en transposant le nombre du membre de droite, on obtient une équation cartésienne de S.