T spécialité

Interrogation écrite du jeudi 18 mars 2021

Durée : 30 minutes
- Fiche autorisée
- Calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$ tels que A et C ne soient pas confondus. On note I le milieu de $[\text{AB}]$.

1°) Compléter les égalités suivantes permettant de réduire les sommes vectorielles du membre de gauche.

$\forall \text{M} \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}} = \text{........}$ $\qquad$ $\forall \text{M} \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MC}} = \text{........}$

2°) On note F l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\left(\overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MC}}\right) = 0$.

Compléter les lignes en pointillés ci-dessous par des égalités de produits scalaires puis conclure.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$\text{M} \in F \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MC}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ ……………………

$\Leftrightarrow$ ……………………

$\Leftrightarrow$ ……………………

L'ensemble F est ………………………………………………………………………………………………

II. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 3 - 2\ln|x-1|$.

Compléter :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f'(x) = \text{................}$ (un seul résultat)

III. (2 points)

Déterminer suivant les valeurs de m l'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\text{e}^{1-3x} = m \quad (1)$.

Écrire un cas par case en répondant directement $S = \ldots$.

IV. (4 points : 2 points par réponse)

Une urne contient cinq boules bleues, quatre boules jaunes et deux boules rouges.
On tire simultanément trois boules dans l'urne.

• Quel est le nombre de tirages comportant exactement deux boules bleues ?	………
• Quel est le nombre de tirages comportant exactement deux boules de la même couleur ?	………

V. (2 points)

On pose $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1°) Combien peut-on écrire d'entiers naturels en utilisant tous les chiffres de E une et une seule fois ? ……….

2°) Combien peut-on écrire d'entiers naturels pairs en utilisant tous les chiffres de E une et une seule fois ? ……….

VI. (2 points)

Quel est le coefficient de x^{10} dans le développement de $(2x^2 - 1)^{13}$ où x est un réel quelconque ?

……….

VII. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Démontrer au choix l'une des propositions suivantes :

P : « $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt{x^2+1} < x+1$ » ; Q : « $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x^2+1} > x$ ».

On admettra que l'autre proposition est vraie pour la question suivante.

2°) Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

À l'aide de la question 1°), déterminer la partie entière de $\sqrt{n^2+1}$.

……………………………………………………………… ………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………

Corrigé de l'interrogation écrite du 18-3-2021

I.

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$ tels que A et C ne soient pas confondus. On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.

1°) Compléter les égalités suivantes permettant de réduire les sommes vectorielles du membre de gauche.

$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}=2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ $\qquad\qquad$ $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

2°) On note F l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)=0$.

Compléter les lignes en pointillés ci-dessous par des égalités de produits scalaires puis conclure.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M} \in F &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0 \\
&\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0
\end{aligned}
$$

L'ensemble F est le plan orthogonal à (AC) passant par I.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto 3-2\ln|x-1|$.

Compléter :

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \quad f'(x)=-\dfrac{2}{x-1}$ (un seul résultat)

On peut aussi écrire $f'(x)=\dfrac{2}{1-x}$.

III.

Déterminer suivant les valeurs de m l'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^{1-3x}=m \quad (1)$.

Écrire un cas par case en répondant directement $S=\ldots$.

Si $m>0$, alors $S=\left\{\dfrac{1-\ln m}{3}\right\}$.	Si $m\leqslant 0$, alors $S=\varnothing$.

1$^{\text{er}}$ cas : $m > 0$

$(1) \Leftrightarrow 1-3x = \ln m$

$\Leftrightarrow 3x = 1-\ln m$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1-\ln m}{3}$

2$^{\text{e}}$ cas : $m \leqslant 0$

(1) n'a pas de solution car une exponentielle est toujours strictement positive.

On effectue la discussion avant d'écrire $1-3x = \ln m$.

IV.

Une urne contient cinq boules bleues, quatre boules jaunes et deux boules rouges.
On tire simultanément trois boules dans l'urne.

• Quel est le nombre de tirages comportant exactement deux boules bleues ?	60
• Quel est le nombre de tirages comportant exactement deux boules de la même couleur ?	111

• Le nombre de tirages comportant exactement deux boules bleues est donné par :

$$\binom{5}{2}\times\binom{6}{1}=\binom{5}{2}\times 6 = 10\times 6 = 60$$

On peut calculer le coefficient binomial $\binom{5}{2}$ à la main ou à la calculatrice.

On choisit 2 boules parmi les 5 bleues puis 1 boule parmi les autres (non bleues).

• Le nombre de tirages comportant exactement deux boules de la même couleur est donné par :

$$\underbrace{\binom{5}{2}\times\binom{6}{1}}_{\text{déjà fait (question 1°)}}+\binom{4}{2}\times\binom{7}{1}+\binom{2}{2}\times\binom{9}{1}=60+\binom{4}{2}\times 7+1\times 9=60+7\times 6+9=111$$

On distingue 3 cas selon que le tirage contient exactement 2 boules bleues, exactement 2 boules jaunes, exactement 2 boules rouges.
On additionne les nombres de tirages de chaque cas.

V.

On pose $E=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1°) Combien peut-on écrire d'entiers naturels en utilisant tous les chiffres de E une et une seule fois ? 120

2°) Combien peut-on écrire d'entiers naturels pairs en utilisant tous les chiffres de E une et une seule fois ? 48

Dans les deux cas, on peut utiliser la méthode des cases :

1°) $5!=120$

5	4	3	2	1

2°) $4!\times 2=48$ (il y a deux choix possibles pour le dernier chiffre)

On commence par choisir le chiffre des unités (2 possibilités) et seulement après les autres chiffres.

VI.

Quel est le coefficient de x^{10} dans le développement de $\left(2x^2-1\right)^{13}$ où x est un réel quelconque ?

41184

On applique la formule du binôme de Newton :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \left(2x^2-1\right)^{13}=\sum_{k=0}^{k=13}\binom{13}{k}\left(2x^2\right)^k\times(-1)^{13-k}$$

Le monôme d'exposant 10 dans ce développement est obtenu pour $k=5$: $\binom{13}{5}\left(2x^2\right)^5\times(-1)^{13-5}=32\times\binom{13}{5}x^{10}$.

Le coefficient de x^{10} dans le développement est donc $32\times\binom{13}{5}=41184$.

On peut calculer le coefficient binomial à l'aide de la calculatrice.

VII.

1°) Démontrer au choix l'une des propositions suivantes :

P : « $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad \sqrt{x^2+1}<x+1$ » ; Q : « $\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x^2+1}>x$ ».

On admettra que l'autre proposition est vraie pour la question suivante.

● Démonstration de P :

Soit x un réel strictement positif quelconque.

On a $2x > 0$.
En additionnant x^2+1 à chaque membre, on obtient $x^2+1+2x > x^2+1$ soit $(x+1)^2 > x^2+1$.

Les deux membres sont positifs ou nuls.

On peut donc passer à la racine carrée.

$$\sqrt{(x+1)^2} > \sqrt{x^2+1}$$

Or $x > 0$ par hypothèse d'où $x+1 > 0$. Par suite, $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$.

On en déduit que $\sqrt{x^2+1} < x+1$.

La proposition P est donc démontrée.

● Démonstration de Q :

Soit x un réel positif ou nul quelconque.

On a $1 > 0$.
En additionnant x^2 à chaque membre, on obtient $x^2+1 > x^2$ (cette inégalité est en fait valable pour x quelconque).

Les deux membres sont positifs ou nuls.

On peut donc passer à la racine carrée.

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$$

Or $x \geqslant 0$ par hypothèse d'où $\sqrt{x^2} = x$.

On en déduit que $\sqrt{x^2+1} > x$.

La proposition Q est donc démontrée.

2°) Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
À l'aide de la question 1°), déterminer la partie entière de $\sqrt{n^2+1}$.

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{R}_+^*$.
D'après la proposition P, on a $\sqrt{n^2+1} < n+1 \quad (1)$.

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{R}_+$.
D'après la proposition Q, on a $\sqrt{n^2+1} > n$.
Une inégalité stricte entraîne une inégalité large.
On en déduit donc que $\sqrt{n^2+1} \geqslant n \quad (2)$.

En rassemblant les résultats des inégalités (1) et (2), on obtient la double inégalité $n \leqslant \sqrt{n^2+1} < n+1 \quad (3)$.

Or la partie entière d'un réel x est l'unique entier relatif p tel que $p \leqslant x < p+1$.

Comme n est un entier naturel, n est aussi un entier relatif et, avec l'inégalité (3), on peut affirmer que n est la partie entière de $\sqrt{n^2+1}$ (soit avec la notation mathématique de la partie entière, $\mathrm{E}\left(\sqrt{n^2+1}\right) = n$).