TS3

Contrôle du samedi 5 décembre 2009 (3 h)

Prénom : ………………………………… **Nom :** ……………………………………………………

• Sur la première copie, doivent figurer le nom, le prénom, la classe, la date, l'intitulé exact sans abréviations ainsi qu'un <u>cartouche</u> de présentation avec le numéro des exercices.
• Les exercices I à V seront traités sur cette feuille ; les autres exercices devront être traités dans l'ordre, sans renvoi sur d'autres feuilles.
• La rédaction doit être concise et claire, sans ratures ni abréviations. Les calculs doivent être bien présentés (en particulier, traits de fractions à la règle). Les réponses et les résultats doivent être bien mis en évidence (en les encadrant en rouge).

I. (1,5 point) Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]-\infty\,;4\right[$.

On suppose de plus que :

- pour tout $x \in \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]2\,;4\right[$ $\quad f'(x) > 0$;
- pour tout $x \in \left]-2\,;2\right[$ $\quad f'(x) < 0$;
- $f'(-2) = 0$ et $f'(2) = 0$;
- $f(-2) = 3$ et $f(2) = -2$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$.

Compléter les phrases :

L'équation $f(x) = 4$ admet ………. solutions dans I.

L'équation $f(x) = -1{,}5$ admet ………. solutions dans I.

Quelle propriété permet de justifier ces deux réponses ? …………………………………….

Bonus :

Compléter les phrases :

« f établit une bijection de l'intervalle $\mathrm{I}_1 = \left[2\,;4\right[$ dans l'intervalle $\mathrm{J}_1 =$ ……………... »

« f établit une bijection de l'intervalle $\mathrm{I}_2 = \left]-\infty\,;-2\right]$ dans l'intervalle $\mathrm{J}_2 =$ ……………... »

II. (4 points) On considère la fonction $f : x \mapsto 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 2 - x$.

1°) Compléter le tableau ci-dessous.

$f'(x) =$ ………………………………	$f''(x) =$ ………………………………

2°) Compléter le tableau ci-dessous sans mettre les limites. Les flèches doivent être tracées à la règle.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f''(x)$	
Variations de f'	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	
Signe de $f(x)$	

3°) En déduire le signe de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g(x)$	

Justification (pour le 3°) :

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (1,5 point) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$.

Calculer la dérivée de *f*. Aucun détail des calculs n'est demandé.
Dresser le tableau de variations de *f*. On fera figurer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sans détailler les calculs.

$f'(x) =$ ....

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	
Variations de *f*	

IV. (1,5 point) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

Calculer la dérivée de *f*. Aucun détail des calculs n'est demandé.
Dresser le tableau de variations de *f*. On fera figurer les limites en 0^+ et en $+\infty$ sans détailler les calculs.
On fera figurer la valeur de l'extremum.

$f'(x) =$ ....

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	
Variations de *f*	

V. (1,5 point) On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - x + 3$.

Calculer la dérivée de *f*. Aucun détail des calculs n'est demandé.
Dresser le tableau de variations de *f* avec les limites en $-\infty$ et en $+\infty$. On ne détaillera pas le calcul des limites.
On fera figurer la valeur de l'extremum.

$f'(x) =$ ....

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	
Variations de *f*	

VI. (3 points) On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 6$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{3 - u_n}{2}$.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 1$.

1°) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

2°) Exprimer u_n en fonction de *n*.

3°) Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
Exprimer S_n en fonction de *n*.

VII. (4 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\dfrac{n}{n+1}$.

1°) Quel est le signe de tous les termes de la suite (u_n) ? Justifier.

2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La méthode est laissée au choix mais la réponse devra être justifiée avec précision.

3°) Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

4°) Soit (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln\dfrac{n+1}{n}$.

Indiquer parmi les propositions suivantes celles qui sont exactes en justifiant.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + v_n = 0$.

c) La suite (v_n) est minorée.

VIII. (3 points) On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M et M' deux points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses non nulles et opposées.
1°) Démontrer que la droite (MM') est parallèle à une droite fixe dont on donnera une équation.
2°) Démontrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points M et M' se coupent en un point T situé sur l'axe des ordonnées.

Aide à la rédaction pour rédiger le sens de variation d'une suite :
« La suite (u_n) est croissante / décroissante à partir de l'indice … ».

Corrigé du contrôle du 5-12-2009

I.

L'équation $f(x)=4$ admet 1 solution dans I.
L'équation $f(x)=-1{,}5$ admet 3 solutions dans I.

Quelle propriété permet de justifier ces deux réponses ? Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Bonus :

f établit une bijection de l'intervalle $\mathrm{I}_1=[2\,;4[$ dans l'intervalle $\mathrm{J}_1=[2\,;+\infty[$.

f établit une bijection de l'intervalle $\mathrm{I}_2=]-\infty\,;-2]$ dans l'intervalle $\mathrm{J}_2=]-1\,;3]$.

II.

$f : x \mapsto 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 2 - x$

1°)

$f'(x)=\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1$	$f''(x)=-x\mathrm{e}^x$

Commentaire :

Attention à bien dériver la fonction *u* définie par $u(x)=-x\mathrm{e}^x$. On doit utiliser la formule de dérivation d'un produit.

Détail pour le calcul

2°)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	0	–	
Variations de f'		$\nearrow$	0	$\searrow$	
Signe de $f'(x)$		–	0	–	
Variations de f		$\searrow$	0	$\searrow$	
Signe de $f(x)$		+	0	–	

3°) Déduisons-en le signe de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g(x)$		+	0	–	

Justification :

$\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 2 - x}{4(\mathrm{e}^x+1)}=\dfrac{f(x)}{4(\mathrm{e}^x+1)}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad 4(\mathrm{e}^x+1)>0$

Donc le signe de $g(x)$ est le même que celui de $f(x)$.

III. $f : x \mapsto \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$.

$$\boxed{f'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2}}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	
Variations de f	0	$\nearrow$	4

IV. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

$$\boxed{f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}}$$

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

V. $f : x \mapsto e^{2x} - x + 3$

$$\boxed{f'(x) = 2e^{2x} - 1}$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$\dfrac{\ln 2+7}{2}$	↗	$+\infty$

VI. $u_0 = 6$; $u_{n+1} = \dfrac{3-u_n}{2}$.

1°) Démontrons que la suite (v_n) est géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{3-u_n}{2} - 1 = \frac{3-u_n-2}{2} = \frac{1-u_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n - 1) = -\frac{1}{2}v_n$$

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

2°) Exprimons u_n en fonction de n.

Comme la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

$v_0 = u_0 - 1 = 6 - 1 = 5$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

3°)

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Il n'y a pas de formule permettant de réduire cette somme car la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique).

On va utiliser la relation entre les suites (u_n) et (v_n).

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$S_n = (v_1 + 1) + (v_2 + 1) + \ldots + (v_n + 1)$ (on utilise la relation entre u_n et v_n : $u_n = v_n + 1$)

$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + n \times 1$

$$S_n = v_1 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + n$$

$$S_n = 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}} + n$$

$$S_n = -\frac{5}{\cancel{2}} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{\cancel{2}}} + n$$

$$S_n = -\frac{5}{3} \times \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] + n$$

$$\boxed{S_n = n - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

VII. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln \dfrac{n}{n+1}$.

1°) Question qui a perturbé beaucoup d'élèves qui n'ont pas du tout compris ce qu'on demandait (confusion entre signe des termes et existence du logarithme).

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \dfrac{n}{n+1} < 1$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln \dfrac{n}{n+1} < 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < 0$.

On en déduit que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement négatifs.

2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La méthode est laissée au choix mais la réponse devra être justifiée avec précision.

1ère méthode : par différence

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n = \ln \frac{n+1}{n+2} - \ln \frac{n}{n+1}$$

$$= \ln \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^2+2n+1 > n^2+2n$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n > 0$.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} > u_n$.

Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 1.

2e méthode : par étude de fonction.

Considérons la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln \dfrac{x}{x+1}$.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (composée de fonctions dérivables).

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) > 0$.

On en déduit que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 1.

N.B. Le tableau de variations de *f* fait ci-dessous n'est pas vraiment utile.

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	+
Variations de f	‖	$\nearrow$

3°) $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Déterminons une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

Attention : La suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique : il n'y a donc pas de formule permettant de trouver une formule simple pour la somme.

1ère méthode :

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

$S_n = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \ldots + \ln \frac{n}{n+1}$

$S_n = \ln\left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{4} \times \ldots \times \frac{\cancel{n}}{n+1}\right)$

$S_n = \ln \frac{1}{n+1}$

$S_n = -\ln(n+1)$

2e méthode : on utilise la méthode de simplification en cascade (ou de télescopage)

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$S_n = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \ldots + \ln \frac{n}{n+1}$

$S_n = \ln 1 - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3} + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 4} + \ldots + \cancel{\ln n} - \ln(n+1)$

$S_n = \ln 1 - \ln(n+1)$

$S_n = -\ln(n+1)$

4°) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln \dfrac{n+1}{n}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. **Faux**

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \ln \dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ln n - \ln(n+1)}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + v_n = 0$. **Vrai.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n + v_n = \ln\frac{n}{n+1} + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(\frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0$$

c) La suite (v_n) est minorée. **Vrai.**

Justification :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n+1}{n} > 1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln\frac{n+1}{n} > 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n > 0$.

La suite (v_n) est minorée par 0.

VIII.

1°) Soit M et M' deux points de $\mathcal{C}$ d'abscisses a et – a où a est un réel non nul.

Le coefficient directeur de la droite (MM') est égal à :

$$m = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{\ln(1+e^a) - \ln(1+e^{-a})}{2a} = \frac{\ln(1+e^a) - \ln\left(1+\frac{1}{e^a}\right)}{2a} = \frac{\ln(1+e^a) - \ln(e^a+1) + a}{2a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

La droite (MM') reste donc parallèle à la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

2°)

La tangente au point d'abscisse a pour équation réduite $y = \frac{e^a}{e^a+1}(x-a) + \ln(1+e^a)$ soit

$$y = \frac{e^a}{e^a+1}x - \frac{ae^a}{e^a+1} + \ln(1+e^a).$$

La tangente au point d'abscisse – a a pour équation réduite :

$$y = \frac{e^{-a}}{e^{-a}+1}(x+a) + \ln(1+e^{-a})$$

Cette équation peut se aussi se mettre sous les formes suivantes :

$$y = \frac{e^{-a}}{e^{-a}+1}x + a\frac{e^{-a}}{e^{-a}+1} + \ln(1+e^{-a})$$

$$y = \frac{e^{-a}}{e^{-a}+1}x + a\frac{e^{-a}}{e^{-a}+1} + \ln\left(1+\frac{1}{e^a}\right)$$

$$y = \frac{e^{-a}}{e^{-a}+1}x + a\frac{\frac{1}{e^a}}{\frac{1}{e^a}+1} + \ln\left(1+\frac{1}{e^a}\right)$$

$$y = \frac{e^{-a}}{e^{-a}+1}x + a\frac{1}{1+e^a} + \ln\left(\frac{e^a+1}{e^a}\right)$$

$$y = \frac{e^{-a}}{e^{-a}+1}x + \frac{a}{1+e^a} + \ln\left(\frac{e^a+1}{e^a}\right)$$

$$y = \frac{e^{-a}}{e^{-a}+1}x + \frac{a}{e^a+1} + \ln(1+e^a) - a$$

$$y = \frac{e^{-a}}{e^{-a}+1}x + \frac{a}{e^a+1} - a + \ln(1+e^a)$$

$$y = \frac{e^{-a}}{e^{-a}+1}x + \frac{a}{e^a+1} - a\frac{e^a+1}{e^a+1} + \ln(1+e^a)$$

$$y = \frac{e^{-a}}{e^{-a}+1}x - a\frac{e^a}{e^a+1} + \ln(1+e^a)$$

On observe que les tangentes au point d'abscisse a et au point d'abscisse – a ont la même ordonnée à l'origine :

$$p = -a\frac{e^a}{e^a+1} + \ln(1+e^a)$$

Les deux tangentes se coupent donc au point $T\left|\begin{array}{l} 0 \\ -a\frac{e^a}{e^a+1} + \ln(1+e^a) \end{array}\right.$.