T experts

Devoir pour le mercredi 17 mars 2021

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………..………………………….

Note : ….. / 20

I. À tout réel a non nul on associe la courbe $\mathcal{C}_a$ d'équation $y = x + \dfrac{a^2}{x}$ dans le plan P muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Tracer quelques courbes $\mathcal{C}_a$ sur l'écran de la calculatrice.
On peut démontrer que $\mathcal{C}_a$ est une hyperbole.

1°) Soit a un réel non nul. On note f l'homothétie de centre O et de rapport a.
Soit M un point quelconque de P et M' son image par f.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.
Dans l'espace ci-dessous, donner les expressions de x' et y' en fonction de x et y.
On attend directement le résultat (c'est-à-dire les deux égalités) sans expliquer.

………

………

2°) Démontrer que $\mathcal{C}_a$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par f.

……

……

……

……

……

……

……

……

II. On note f l'application définie sur $\mathbb{N}$ par $f(n) = \text{PGCD}\left(6n^2 + 24n + 18\,; 3n^3 + 12n^2 + 9n\right)$ pour tout entier naturel n.
Exprimer $f(n)$ en fonction de n.
Indication : Utiliser des factorisations.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du devoir pour le 17-3-2021

I. À tout réel a non nul on associe la courbe $\mathcal{C}_a$ d'équation $y = x + \dfrac{a^2}{x}$ dans le plan P muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Tracer quelques courbes $\mathcal{C}_a$ sur l'écran de la calculatrice.
On peut démontrer que $\mathcal{C}_a$ est une hyperbole.

1°) Soit a un réel non nul. On note f l'homothétie de centre O et de rapport a.
Soit M un point quelconque de P et M' son image par f.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.
Dans l'espace ci-dessous, donner les expressions de x' et y' en fonction de x et y.
On attend directement le résultat (c'est-à-dire les deux égalités) sans expliquer.

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = ay \end{cases}$$

2°) Démontrer que $\mathcal{C}_a$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par f.

Soit M un point quelconque de P et M' son image par f.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \mathcal{C}_1 &\Leftrightarrow y = x + \frac{1}{x} \text{ et } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{y'}{a} = \frac{x'}{a} + \frac{1}{\frac{x'}{a}} \text{ et } x' \neq 0 \\ &\Leftrightarrow y' = x' + \frac{a^2}{x'} \text{ et } x' \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{M}' \in \mathcal{C}_a \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{C}_a$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par f.

II. On note f l'application définie sur $\mathbb{N}$ par $f(n) = \mathrm{PGCD}\left(6n^2 + 24n + 18\,; 3n^3 + 12n^2 + 9n\right)$ pour tout entier naturel n.
Exprimer $f(n)$ en fonction de n.
Indication : Utiliser des factorisations.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 6n^2 + 24n + 18 = 6\left(n^2 + 4n + 3\right)$ et $3n^3 + 12n^2 + 9n = 3n\left(n^2 + 4n + 3\right)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 3\left(n^2 + 4n + 3\right)\mathrm{PGCD}(2\,; n)$ car $n^2 + 4n + 3$ est un entier naturel non nul.

On distingue ensuite deux cas.

1^er^ cas : n pair

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 6\left(n^2 + 4n + 3\right)$

2^e^ cas : n impair

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 3\left(n^2 + 4n + 3\right)$