T experts

Devoir pour le lundi 1[er] mars 2021

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………..…………………………. **Note : ….. / 20**

I. On rappelle la propriété suivante, démontrée dans le devoir pour le 25-11-2020 :

Pour tout réel θ et tout entier naturel n, on a $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$.

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En appliquant la propriété pour un réel θ bien choisi (à expliciter), déterminer A^n pour n entier naturel quelconque.
On attend une rédaction très concise.

II. Le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note r le quart de tour direct de centre O.

1°) Soit M un point quelconque de P et M' son image par r.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.
Dans l'espace ci-contre, donner les expressions de x' et y' en fonction de x et y.
On attend directement le résultat (c'est-à-dire les deux égalités) sans expliquer.
2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \ln x$.
Déterminer une équation de $\mathcal{C}'$, image de $\mathcal{C}$ par r.
Démontrer que $\mathcal{C}'$ est la représentation graphique d'une fonction f que l'on définira.
On rédigera sur le modèle ci-dessous à recopier (3 lignes d'équivalences) et compléter :

Soit M un point quelconque de P et M' son image par r.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.

$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow \ldots$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère les matrices X et Y suivantes, respectivement unicolonne et uniligne :

$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des nombres complexes donnés ;

$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ où $y_1, y_2, \ldots y_n$ sont des nombres complexes donnés.

1°) On pose $\mathrm{A} = \mathrm{XY}$. On vérifie sans peine grâce aux dimensions que A est une matrice carrée d'ordre n.
Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $a_{i,j}$ le coefficient de A situé sur la i-ième ligne et dans la j-ième colonne.
Donner l'expression de $a_{i,j}$.

………………… (une seule égalité sans justifier)

2°) On pose $\mathrm{B} = \mathrm{YX}$. Déterminer la matrice B.

……………………………………………………… (une seule égalité sans justifier)

Corrigé du devoir pour le 1-3-2021

I. On rappelle la propriété suivante, démontrée dans le devoir pour le 25-11-2020 :

Pour tout réel θ et tout entier naturel n, on a $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$.

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En appliquant la propriété pour un réel θ bien choisi (à expliciter), déterminer A^n pour n entier naturel quelconque.
On attend une rédaction très concise.

On peut écrire $\mathrm{A} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Or on sait que $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On peut donc écrire $\mathrm{A} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$.

On peut donc passer au calcul de A^n pour n entier naturel quelconque en utilisant la propriété rappelée.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{A}^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}^n$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n \begin{pmatrix} \cos\dfrac{n\pi}{4} & -\sin\dfrac{n\pi}{4} \\ \sin\dfrac{n\pi}{4} & \cos\dfrac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$$

II. Le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note r le quart de tour direct de centre O.

1°) Soit M un point quelconque de P et M' son image par r.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.
Dans l'espace ci-contre, donner les expressions de x' et y' en fonction de x et y.
On attend directement le résultat (c'est-à-dire les deux égalités) sans expliquer.

Le quart de tour direct de centre O est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On a $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Ces formules se vérifient graphiquement.

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \ln x$.
Déterminer une équation de $\mathcal{C}'$, image de $\mathcal{C}$ par r.
Démontrer que $\mathcal{C}'$ est la représentation graphique d'une fonction f que l'on définira.
On rédigera sur le modèle ci-dessous à recopier (3 lignes d'équivalences) et compléter :

Soit M un point quelconque de P et M' son image par r.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.

$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \iff \ldots$

$\iff \ldots$

$\iff \ldots$

Soit M un point quelconque de P et M' son image par r.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.

$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \iff y = \ln x$ et $x > 0$

$\iff -x' = \ln y'$ et $y' > 0$

$\iff y' = \mathrm{e}^{-x'}$

$\mathcal{C}'$ est donc la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.

$\mathcal{C}'$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

On peut aisément tracer $\mathcal{C}'$.

III. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère les matrices X et Y suivantes, respectivement unicolonne et uniligne :

$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où x_1, x_2, … x_n sont des nombres complexes donnés ;

$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ où y_1, y_2, … y_n sont des nombres complexes donnés.

1°) On pose $\mathrm{A} = \mathrm{XY}$. On vérifie sans peine grâce aux dimensions que A est une matrice carrée d'ordre n.
Pour tout couple $(i,\ j)$ d'entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $a_{i,\,j}$ le coefficient de A situé sur la i-ième ligne et dans la j-ième colonne.
Donner l'expression de $a_{i,\,i}$.

$a_{i,\,i} = x_i y_i$ (une seule égalité sans justifier)

2°) On pose $\mathrm{B} = \mathrm{YX}$. Déterminer la matrice B.

$\mathrm{B} = \left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \right)$ (une seule égalité sans justifier)