Terminale experts

Interrogation écrite du mardi 19 janvier 2021

Durée : 30 minutes
- Fiche
- Calculatrice autorisée

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….……………………………….

Note : ….. / 20

I. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points)

Pour tout entier relatif n, on note E_n l'ensemble des diviseurs positifs communs à $3n+5$ et $2n+1$.

1°) Soit d un élément de E_n.
Démontrer que d est égal à 1 ou 7.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

2°) Compléter le tableau de congruences ci-dessous où n est un entier relatif :

$n \equiv \ldots$ (mod. 7)	0	1	2	3	4	5	6
$3n+5 \equiv \ldots$ (mod. 7)							
$2n+1 \equiv \ldots$ (mod. 7)							

3°) En déduire l'ensemble E_n suivant les valeurs de n.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

II. (9 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points + 2 points + 1 point ; 3°) 1 point)

On rappelle la propriété *P* suivante : « Tout entier naturel est congru à la somme des chiffres de son écriture en base dix modulo 9 ».
Les questions 2°) et 3°) sont indépendantes mais utilisent la question 1°).

1°) Compléter la deuxième ligne du tableau de congruences ci-dessous où n est un entier relatif en écrivant chaque fois le plus petit entier naturel. On pourra utiliser la propriété *P*.

$n \equiv \ldots \pmod{9}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^3 \equiv \ldots \pmod{9}$	…	…	…	…	…				

2°) On note N l'entier naturel dont l'écriture en base dix s'écrit 55…5, le chiffre 5 étant écrit 2021 fois.
Quel est le reste de la division euclidienne de N par 9 ?
Écrire le résultat sur les pointillés ci-dessous et justifier sur les lignes encore en dessous.

……

………..

………..

Quel est le reste de la division euclidienne de N^2 par 9 ?

……

………..

………..

Le nombre N est-il le cube d'un entier naturel ? Justifier.

………..

………..

3°) La proposition suivante « Pour tout entier relatif n non multiple de 3, $n^6 \equiv 1 \pmod{9}$ » est-elle vraie ou fausse ?

……

III. (4 points)

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit M un point quelconque du plan et M' son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
Écrire les expressions dans l'espace ci-contre.

Corrigé de l'interrogation écrite du 19-1-2021

I.

Pour tout entier relatif n, on note E_n l'ensemble des diviseurs positifs communs à $3n+5$ et $2n+1$.

1°) Soit d un élément de E_n.
Démontrer que d est égal à 1 ou 7.

Comme $d \in \mathrm{E}_n$, d divise $3n+5$ et $2n+1$ (par définition de l'ensemble E_n).
On peut donc affirmer que d divise toute combinaison linéaire de $3n+5$ et $2n+1$ à coefficients entiers relatifs.
En particulier, d divise $2(3n+5)-3(2n+1)=7$ (coefficients 2 et – 3).
Or les diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7 donc d est égal à 1 ou 7.

2°) Compléter le tableau de congruences ci-dessous où n est un entier relatif :

$n \equiv \ldots \pmod{7}$	0	1	2	3	4	5	6
$3n+5 \equiv \ldots \pmod{7}$	5	1	4	0	3	6	2
$2n+1 \equiv \ldots \pmod{7}$	1	3	5	0	2	4	6

3°) En déduire l'ensemble E_n suivant les valeurs de n.

On sait que $1 \in \mathrm{E}_n$ de manière évidente (puisque 1 divise $3n+5$ et $2n+1$).

De plus, d'après la question 1°), $\mathrm{E}_n \subset \{1\,;7\}$.

On distingue deux cas selon que n est congru à 3 modulo 7 ou non.

● 1^er^ cas : n congru à 3 modulo 7
Dans ce cas, d'après le tableau de congruences, $3n+5$ et $2n+1$ sont divisibles par 7.
Donc $7 \in \mathrm{E}_n$.
On en déduit que $\mathrm{E}_n = \{1\,;7\}$.

● 2^e^ cas : n non congru à 3 modulo 7
Dans ce cas, d'après le tableau de congruences, $3n+5$ et $2n+1$ ne sont pas divisibles par 7.
Donc $7 \notin \mathrm{E}_n$.
On en déduit que $\mathrm{E}_n = \{1\}$.

Bilan :

● Si n est congru à 3 modulo 7, alors $\mathrm{E}_n = \{1\,;7\}$.

● Si n n'est pas congru à 3 modulo 7, alors $\mathrm{E}_n = \{1\}$.

II.

On rappelle la propriété P suivante : « Tout entier naturel est congru à la somme des chiffres de son écriture en base dix modulo 9 ».
Les questions 2°) et 3°) sont indépendantes mais utilisent la question 1°).

1°) Compléter la deuxième ligne du tableau de congruences ci-dessous où n est un entier relatif en écrivant chaque fois le plus petit entier naturel. On pourra utiliser la propriété P.

$n \equiv \ldots \pmod{9}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^3 \equiv \ldots \pmod{9}$	0	1	8	0	1	8	0	1	8

2°) On note N l'entier naturel dont l'écriture en base dix s'écrit 55…5, le chiffre 5 étant écrit 2021 fois.
Quel est le reste de la division euclidienne de N par 9 ?
Écrire le résultat sur les pointillés ci-dessous et justifier sur les lignes encore en dessous.

7

D'après la propriété P, $\mathrm{N} \equiv 5 \times 2021 \pmod{9}$ car la somme des chiffres en base dix de N est $5+5+\ldots+5 = 5 \times 2021$.

Or toujours d'après la propriété P, $2021 \equiv 2+0+2+1 \pmod{9}$ soit $2021 \equiv 5 \pmod{9}$.
D'où $\mathrm{N} \equiv 5 \times 5 \pmod{9}$ soit $\mathrm{N} \equiv 25 \pmod{9}$.

Or $25 \equiv 2+5 \pmod{9}$ soit $25 \equiv 7 \pmod{9}$

Donc $\mathrm{N} \equiv 7 \pmod{9}$.

Le reste de la division euclidienne de N par 9 est donc égal à 7.

Quel est le reste de la division euclidienne de N^2 par 9 ?

4

On a $\mathrm{N} \equiv 7 \pmod{9}$ donc $\mathrm{N}^2 \equiv 7^2 \pmod{9}$ soit $\mathrm{N}^2 \equiv 49 \pmod{9}$.
En appliquant la méthode de la somme des chiffres, on obtient $\mathrm{N}^2 \equiv 4 \pmod{9}$.

Le reste de la division euclidienne de N^2 par 9 est donc égal à 4.

Le nombre N est-il le cube d'un entier naturel ? Justifier.

Le reste de la division euclidienne de N par 9 est 7.
Or d'après le tableau de congruences du 1°), le reste de la division euclidienne du cube d'un entier par 9 n epeut pas être égal à 7.
On en déduit que N n'est pas le cube d'un entier naturel.

3°) La proposition suivante « Pour tout entier relatif n non multiple de 3, $n^6 \equiv 1 \pmod{9}$ » est-elle vraie ou fausse ?

Vraie

Soit n un entier relatif non multiple de 3.

Dans ce cas, n est congru soit à 1, soit à 2, soit à 4, soit à 5, soit à 7, soit à 8 modulo 9.

On peut utiliser le résultat de la congruence de n^3 modulo 9.

En élevant les deux membres au carré, on obtient $n^6 \equiv 1 \pmod{9}$ dans chaque cas.

III.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit M un point quelconque du plan et M' son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

On note $\left(x\,;y\right)$ les coordonnées de M et $\left(x'\,;y'\right)$ les coordonnées de M'.

Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Écrire les expressions dans l'espace ci-contre.

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{y\sqrt{3}}{2} \\ y' = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} - \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

On peut aussi écrire $\begin{cases} x' = \dfrac{-x - y\sqrt{3}}{2} \\ y' = \dfrac{x\sqrt{3} - y}{2} \end{cases}$.

On utilise l'égalité matricielle $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{3} & -\sin\dfrac{2\pi}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi}{3} & \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui donne $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.