T experts

Devoir pour le mercredi 13 janvier 2021

Numéro : ….. **Prénom et nom : ……………………………………………….** **Note : ….. / 20**

I. À tout nombre complexe z on associe la matrice $\mathrm{A}(z)=\begin{pmatrix} z & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \overline{z} \end{pmatrix}$.

On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour tout réel k, on note E_k des points M de P d'affixe z tels que $\det \mathrm{A}(z)=k$.

Déterminer l'ensemble E_k suivant les valeurs de k.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{a} & \overline{b} \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres complexes.

1°) Démontrer que $\det \mathrm{A} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(a\overline{b}\right)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Démontrer l'équivalence $\det \mathrm{A}=0 \Leftrightarrow a\overline{b} \in \mathbb{R}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. Déterminer un inverse de 17 modulo 29.

…… (une seule réponse sans justifier)

Compléter l'équivalence suivante où x et y sont deux entiers relatifs.

$17x \equiv y \pmod{29} \Leftrightarrow x \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots \pmod{29}$

Corrigé du devoir pour le 13-1-2021

I. À tout nombre complexe z on associe la matrice $\mathrm{A}(z)=\begin{pmatrix} z & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \overline{z} \end{pmatrix}$.

On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour tout réel k, on note E_k des points M de P d'affixe z tels que $\det \mathrm{A}(z)=k$.

Déterminer l'ensemble E_k suivant les valeurs de k.

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \det \mathrm{A}(z)=z\overline{z}-\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})=|\,z\,|^2-1$

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\in E_k &\Leftrightarrow |\,z\,|^2-1=k \\ &\Leftrightarrow |\,z\,|^2=k+1 \end{aligned}$$

On regarde le signe de $k+1$.
On fait une discussion suivant les valeurs de k.

• Si $k>-1$, alors $k+1>0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\in E_k &\Leftrightarrow |\,z\,|=\sqrt{k+1} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{OM}=\sqrt{k+1} \end{aligned}$$

E_k est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k+1}$.

• Si $k<-1$, alors $k+1<0$.
Dans ce cas, $E_k=\varnothing$.

• Si $k=-1$, alors $k+1=0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\in E_{-1} &\Leftrightarrow \mathrm{OM}=0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{M}=\mathrm{O} \end{aligned}$$

E_{-1} est le singleton $\{\mathrm{O}\}$.

(On peut parler de manière abusive de « cercle-point ».)

II. On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{a} & \overline{b} \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres complexes.

1°) Démontrer que $\det \mathrm{A}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(a\overline{b}\right)$.

$$\begin{aligned} \det \mathrm{A} &= a\overline{b}-\overline{a}b \\ &= a\overline{b}-\overline{a\overline{b}} \\ &= 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(a\overline{b}\right) \end{aligned}$$

On utilise la propriété : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z-\overline{z}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z$.

2°) Démontrer l'équivalence $\det \mathrm{A}=0 \Leftrightarrow a\overline{b}\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \det \mathrm{A}=0 &\Leftrightarrow 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(a\overline{b}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(a\overline{b}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow a\overline{b}\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

III. Déterminer un inverse de 17 modulo 29.

12 (une seule réponse sans justifier)

Compléter l'équivalence suivante où x et y sont deux entiers relatifs.

$$17x\equiv y \pmod{29} \Leftrightarrow x\equiv 12y \pmod{29}$$