T spécialité

Interrogation écrite du jeudi 21 janvier 2021

Durée : 20 minutes

Fiche autorisée

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

1°) Le but de la question est de déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}$.

Compléter les pointillés ci-dessous.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{-x}_{X}\Big) = \ldots\ldots\ldots \\ \lim\limits_{X \to \ldots} \mathrm{e}^{X} = \ldots. \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = \ldots. \ .$$

On utilisera le résultat de cette question dans les deux questions suivantes (qui sont indépendantes l'une de l'autre).

2°) On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dont la borne de droite est $+\infty$ telle que pour tout $x \in I$ on ait $2 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 2 + \mathrm{e}^{-x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

………

………

………

………

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto 2x + \mathrm{e}^{-x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

………

………

………

………

………

Dans les exercices **II** et **III**, on complètera les pointillés permettant de déterminer la limite demandée en prenant soin de bien distinguer les x et les X.

II. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{e^x + 2}$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\left(e^x + 2\right)}_{X} = ... \\ \lim\limits_{X \to ...} \sqrt{X} = ... \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ... \ .$$

III. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ...} \underbrace{...............}_{X} = ... \\ \lim\limits_{X \to ...} .... = ... \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = ... \ .$$

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Dans un établissement scolaire, une association sportive propose diverses activités. L'établissement compte 40 % de filles et 60 % de garçons. Parmi les filles, 70 % sont membres de l'association et parmi les garçons, 50 % sont membres de l'association. On considère un élève de l'établissement choisi au hasard.
Faire un arbre de probabilités au brouillon. On donnera les résultats des questions 1°) et 2°) sous forme décimale et le résultat de la question 3°) sous forme fractionnaire.

1°) Calculer la probabilité que l'élève soit une fille et soit membre de l'association. ……...

2°) Calculer la probabilité que l'élève soit membre de l'association. ……...

3°) Calculer la probabilité que l'élève soit une fille sachant qu'il est membre de l'association. ……...

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite D définie par le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

1°) Déterminer les coordonnées d'un point A de D et d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.
2°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de D avec l'axe des abscisses.
3°) Déterminer l'ordonnée du point C de D d'abscisse – 1.

1°)		2°)	3°)
……………..	……………..	……………..	……………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 21-1-2021

I.

1°) Le but de la question est de déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}$.

Compléter les pointillés ci-dessous.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{-x}_{X}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

On vérifie le résultat graphiquement sur la calculatrice.

On utilisera le résultat de cette question dans les deux questions suivantes (qui sont indépendantes l'une de l'autre).

2°) On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dont la borne de droite est $+\infty$ telle que pour tout $x \in I$ on ait $2 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 2 + \mathrm{e}^{-x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \mathrm{e}^{-x}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \mathrm{e}^{-x}\right) = 2$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto 2x + \mathrm{e}^{-x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme, } \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

On vérifie le résultat graphiquement sur la calculatrice.

Dans les exercices **II** et **III**, on complètera les pointillés permettant de déterminer la limite demandée en prenant soin de bien distinguer les x et les X.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^{x} + 2}$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\left(\mathrm{e}^{x} + 2\right)}_{X} = 2 \\ \lim\limits_{X \to \ldots} \sqrt{X} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{2}.$$

On vérifie le résultat graphiquement sur la calculatrice.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$. Le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} \underbrace{\ln x}_{X} = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty .$$

On vérifie le résultat graphiquement sur la calculatrice.

IV.

Dans un établissement scolaire, une association sportive propose diverses activités. L'établissement compte 40 % de filles et 60 % de garçons. Parmi les filles, 70 % sont membres de l'association et parmi les garçons, 50 % sont membres de l'association. On considère un élève de l'établissement choisi au hasard.
Faire un arbre de probabilités au brouillon. On donnera les résultats des questions 1°) et 2°) sous forme décimale et le résultat de la question 3°) sous forme fractionnaire.

1°) Calculer la probabilité que l'élève soit une fille et soit membre de l'association. 0,28

2°) Calculer la probabilité que l'élève soit membre de l'association. 0,58

3°) Calculer la probabilité que l'élève soit une fille sachant qu'il est membre de l'association. $\dfrac{14}{29}$

On considère les événements A : « L'élève est une fille » et B : « L'élève est membre de l'association ».

Les information de l'énoncé permettent d'écrire $P(\text{A}) = 0,4$, $P(\overline{\text{A}}) = 0,6$, $P(\text{B/A}) = 0,7$, $P(\text{B}/\overline{\text{A}}) = 0,5$.

1°)

$P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{B/A}) \times P(\text{A})$ (formule des probabilités composées)

$= 0,7 \times 0,4$

$= 0,28$

2°)
On sait que A et $\overline{\text{A}}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(\text{B}) = P(\text{A} \cap \text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B})$

$= 0,28 + P(\overline{\text{A}}) \times P(\text{B}/\overline{\text{A}})$

$= 0,28 + 0,5 \times 0,6$

$= 0,58$

3°)

$$P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} \quad \text{(formule de définition de la probabilité conditionnelle)}$$

$$= \frac{0,28}{0,58}$$

$$= \frac{28}{58}$$

$$= \frac{14}{29}$$

V.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite D définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1°) Déterminer les coordonnées d'un point A de D et d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.
2°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de D avec l'axe des abscisses.
3°) Déterminer l'ordonnée du point C de D d'abscisse – 1.

1°)	2°)	3°)
$\mathrm{A}(1\,;-3)$ $\quad$ $\vec{u}\,(2\,;1)$	$\mathrm{B}(7\,;0)$	-4

Pour la question 2°), on a $y_{\mathrm{B}} = 0$. Le paramètre t du point B sur la droite D vérifie donc $t - 3 = 0$ qui donne immédiatement $t = 3$.
On en déduit que $x_{\mathrm{B}} = 2 \times 3 + 1 = 7$.

Pour la question 3°), on a $x_{\mathrm{C}} = -1$. Le paramètre t du point C sur la droite D vérifie donc $2t + 1 = -1$ qui donne immédiatement $t = -1$.
On en déduit que $y_{\mathrm{C}} = -1 - 3 = -4$.