T1 et T4 spécialité

Contrôle du jeudi 17 décembre 2020

Durée : 50 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………..……………………………..

Note : ….. / 20

I. (7 points)

On considère une roue partagée en *n* secteurs circulaires numérotés de 1 à *n* où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel *i* compris entre 1 et *n*, on note x_i la probabilité d'obtenir le secteur *i*.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A (4 points : 1°) 3 points : 1 point + 1 point + 1 point ; 2°) 1 point)

Dans cette partie, toutes les questions sont indépendantes. On écrira chaque réponse sans égalité.

1°) Dans cette question, on suppose que $n=3$. On lance la roue trois fois de suite dans des conditions identiques indépendantes. On donnera les expressions en fonction de x_1, x_2, x_3.

Quelle est la probabilité d'obtenir les secteurs 1, 2, 3 dans cet ordre ?

……………………..

Quelle est la probabilité d'obtenir le même secteur à chaque lancer ?

……………………..

Quelle est la probabilité d'obtenir les secteurs 1, 2, 3 dans n'importe quel ordre ?

……………………..

2°) Cette question est plus difficile.
Dans cette question, on suppose que *n* est quelconque. On lance la roue *n* fois de suite dans des conditions identiques indépendantes.
Quelle est la probabilité d'obtenir les secteurs 1, 2,…, *n* dans n'importe quel ordre ?
On donnera le résultat en fonction de *n*, x_1, x_2, ………….. x_n.

……………………..

Partie B (3 points : 1°) 2 points : 1 point + 1 point ; 2°) 1 point)

Dans cette partie, on suppose que $n=3$. On suppose également que $x_1=\frac{1}{2}$ et que $x_2=\frac{1}{3}$.

On considère alors le jeu qui consiste à lancer la roue une fois.
Si on obtient le secteur 1, on gagne 6 euros.
Si on obtient le secteur 2, on perd 3 euros.
Si on obtient le secteur 3, on perd 6 euros.
On note G le gain algébrique du joueur en euros.

1°) Compléter la phrase suivante :

G peut prendre les valeurs $g_1=......$, $g_2=......$, $g_3=......$

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de G (où *P* désigne la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire).

g_i	
$P(\mathrm{G}=g_i)$	

Calculer l'espérance mathématique et la variance de G.

…………………… (une seule égalité) …………………… (une seule égalité)

2°) Quelle est la probabilité qu'un joueur ait obtenu le secteur 2 sachant que son gain est négatif (pour une partie) ?

…… (une seule réponse sans égalité)

II. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à *p* où *p* est un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;1[$. On pose $q=1-p$.
On lance *n* fois cette pièce dans des conditions identiques indépendantes, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, et on note chaque fois le côté qu'elle présente.
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) On note u_n la probabilité d'obtenir au moins une fois face à l'issue des *n* lancers.
Exprimer u_n en fonction de *p* et *n* et déterminer sur la ligne en dessous sa limite lorsque *n* tend vers $+\infty$ en justifiant.

$u_n=$.......................... (un seul résultat)

……..

2°) On note v_n la probabilité de n'obtenir que des faces à l'issue des *n* lancers.
Exprimer v_n en fonction de *q* et *n* et déterminer sur la ligne en dessous sa limite lorsque *n* tend vers $+\infty$ en justifiant.

$v_n=$.......................... (un seul résultat)

……..

3°) On suppose dans cette question que $n=3$.
Exprimer en fonction de *p* et *q* la probabilité d'obtenir exactement deux piles à l'issue des 3 lancers.

…………………….. (une seule expression)

4°) On suppose dans cette question que $n=1$ et que $p=\frac{1}{4}$.

On considère le jeu qui consiste à lancer la pièce une fois. Si on obtient pile, on gagne 3 euros ; si on obtient face, on perd 1 euro. On note G le gain algébrique en euros du joueur.

Compléter les deux fonctions Python `jeu1()` et `jeu2()` permettant de simuler le gain algébrique du joueur en euros (autrement dit d'effectuer une simulation de la variable aléatoire G).

```
from random import random

def jeu1():
    r=random()
    if r<= 1/4:
       G=……
    else:
       G=……
    return G
```

```
from random import randint

def jeu2():
    r=randint(1,4)
    if r=…:
       G=……
    else:
       G=……
    return G
```

III. (5 points : 1°) 3 points : 2 points + 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=e^{1-u_n}$ pour tout entier naturel n.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n (il n'est pas possible de trouver une formule explicite donnant u_n en fonction de n).

Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y=e^{1-x}$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

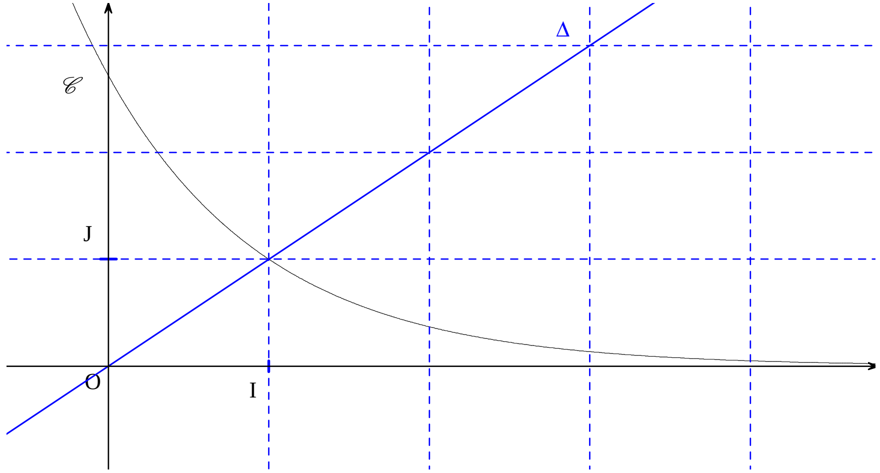
1°) Effectuer avec soin et précision la construction permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_6 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).
Laisser les traits et éléments de construction apparents.
On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2 …
On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.

Que peut-on penser de la convergence de la suite (u_n) ?
On répondra avec précision selon le modèle de rédaction à recopier et compléter : « D'après le graphique, il semble que (u_n) … ».
Aucune justification n'est demandée.

……..

……..

……..



2°) On considère la fonction Python `seuil(a)` qui prend pour argument un réel a strictement positif et qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $|u_n-1|\leqslant a$.
Compléter les instructions manquantes dans l'encadré ci-dessous.

```
from math import exp

def seuil(a):
    u=0
    n=0
    while abs(u-1) ……. :

          …………

          n=n+1
     return n
```

Bonus (1 point) :

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 4.
On note M le point du segment $[\text{AE}]$ tel que $\text{AM}=1$ et N le milieu du segment $[\text{CG}]$.
Calculer la distance MN.

……..

……..

……..

……..

Corrigé du contrôle du 17-12-2020

I.

On considère une roue partagée en n secteurs circulaires numérotés de 1 à n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, on note x_i la probabilité d'obtenir le secteur i.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, toutes les questions sont indépendantes. On écrira chaque réponse sans égalité.

1°) Dans cette question, on suppose que $n=3$. On lance la roue trois fois de suite dans des conditions identiques indépendantes. On donnera les expressions en fonction de x_1, x_2, x_3.

Quelle est la probabilité d'obtenir les secteurs 1, 2, 3 dans cet ordre ?

$x_1x_2x_3$

Quelle est la probabilité d'obtenir le même secteur à chaque lancer ?

$x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3$

On additionne la probabilité d'obtenir le secteur 1 à chaque lancer, la probabilité d'obtenir le secteur 2 à chaque lancer et la probabilité d'obtenir le secteur 3 à chaque lancer.

Quelle est la probabilité d'obtenir les secteurs 1, 2, 3 dans n'importe quel ordre ?

$6x_1x_2x_3$

2°) Cette question est plus difficile.
Dans cette question, on suppose que n est quelconque. On lance la roue n fois de suite dans des conditions identiques indépendantes.
Quelle est la probabilité d'obtenir les secteurs 1, 2,…, n dans n'importe quel ordre ?
On donnera le résultat en fonction de n, x_1, x_2, ………….. x_n.

$n!x_1x_2\ldots x_n$

On généralise le résultat de la question précédente.

On utilise la propriété du cours.
Le nombre permutations de n objets deux à deux distincts où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 est égal à n !.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $n=3$. On suppose également que $x_1=\dfrac{1}{2}$ et que $x_2=\dfrac{1}{3}$.
On considère alors le jeu qui consiste à lancer la roue une fois.
Si on obtient le secteur 1, on gagne 6 euros.
Si on obtient le secteur 2, on perd 3 euros.
Si on obtient le secteur 3, on perd 6 euros.
On note G le gain algébrique du joueur en euros.

1°) Compléter la phrase suivante :

G peut prendre les valeurs $g_1=6$, $g_2=-3$, $g_3=-6$.

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de G (où P désigne la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire).

g_i	6	-3	-6
$P(\mathrm{G}=g_i)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

Calculer l'espérance mathématique et la variance de G.

$\mathrm{E}(\mathrm{G})=1$ (une seule égalité) $\qquad$ $\mathrm{V}(\mathrm{G})=26$ (une seule égalité)

Pour calculer la variance, on peut utiliser soit la formule de définition que la formule de König-Huygens.

2°) Quelle est la probabilité qu'un joueur ait obtenu le secteur 2 sachant que son gain est négatif (pour une partie) ?

$\dfrac{2}{3}$ (une seule réponse sans égalité)

On applique la formule de définition d'une probabilité conditionnelle.
Il s'agit en fait de la probabilité conditionnelle $P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$ où A est l'événement « obtenir le secteur 2 » et B l'événement « obtenir un gain négatif ».

$P(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$ (formule de définition de la probabilité conditionnelle)

$=\dfrac{P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{B})}$ (en effet, $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\mathrm{A}$ puisque l'événement A est inclus dans l'événement B)

$=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$ (en effet, $P(\mathrm{B})=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$)

$=\dfrac{2}{3}$

II.

On considère une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à p où p est un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;1[$. On pose $q=1-p$.
On lance n fois cette pièce dans des conditions identiques indépendantes, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, et on note chaque fois le côté qu'elle présente.
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) On note u_n la probabilité d'obtenir au moins une fois face à l'issue des n lancers.
Exprimer u_n en fonction de p et n et déterminer sur la ligne en dessous sa limite lorsque n tend vers $+\infty$ en justifiant.

$$u_n = 1 - p^n \text{ (un seul résultat)}$$

On utilise l'événement contraire de « obtenir au moins une fois face » : « obtenir que des piles ».
On sait que $0 < p < 1$ donc a fortiori, on a $-1 < p < 1$.
D'après le cours, $p^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - 0 = 1$.

2°) On note v_n la probabilité de n'obtenir que des faces à l'issue des n lancers.
Exprimer v_n en fonction de q et n et déterminer sur la ligne en dessous sa limite lorsque n tend vers $+\infty$ en justifiant.

$$v_n = q^n \text{ (un seul résultat)}$$

On sait que $0 < p < 1$ donc $0 < q < 1$. A fortiori, on a $-1 < q < 1$.
D'après le cours, $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

3°) On suppose dans cette question que $n = 3$.
Exprimer en fonction de p et q la probabilité d'obtenir exactement deux piles à l'issue des 3 lancers.

$$3p^2q \text{ (une seule expression)}$$

Pour répondre à cette question, il n'est obligatoire de faire un arbre de probabilités.
On peut tout de suite dire qu'il y a 3 résultats possibles : (pile-pile-face), (pile-face-pile), (face-pile-pile).
La probabilité de chaque résultat est $p \times p \times q = p^2q$.

4°) On suppose dans cette question que $n = 1$ et que $p = \dfrac{1}{4}$.
On considère le jeu qui consiste à lancer la pièce une fois. Si on obtient pile, on gagne 3 euros ; si on obtient face, on perd 1 euro. On note G le gain algébrique en euros du joueur.

Compléter les deux fonctions Python `jeu1()` et `jeu2()` permettant de simuler le gain algébrique du joueur en euros (autrement dit d'effectuer une simulation de la variable aléatoire G).

```
from random import random

def jeu1():
    r=random()
    if r<= 1/4:
       G=3
    else:
       G=– 1
    return G
```

```
from random import randint

def jeu2():
    r=randint(1,4)
    if r=1:
       G=3
    else:
       G=- 1
    return G
```

Dans la fonction `jeu2()`, on peut écrire `r=1` ou `r=2` ou `r=3` ou `r=4`.

Il s'agit de fonctions sans arguments.

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = e^{1-u_n}$ pour tout entier naturel n.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n (il n'est pas possible de trouver une formule explicite donnant u_n en fonction de n).

Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y = e^{1-x}$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1°) Effectuer avec soin et précision la construction permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_6 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).
Laisser les traits et éléments de construction apparents.
On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2 …
On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.

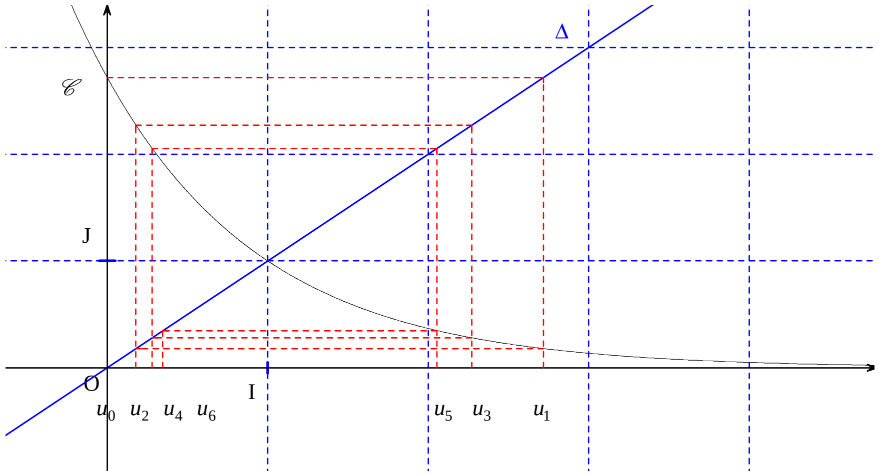
Que peut-on penser de la convergence de la suite (u_n) ?
On répondra avec précision selon le modèle de rédaction à recopier et compléter : « D'après le graphique, il semble que (u_n) … ».
Aucune justification n'est demandée. On se contentera d'une observation graphique.

D'après le graphique, il semble que (u_n) converge vers 1.
Cette conjecture n'est pas du tout facile à visualiser sur le graphique à cause de la convergence très lente de la suite vers 1 (cf. réponse de la question suivante avec la fonction Python).

On utilise la droite Δ tracée sur le graphique qui a pour équation $x = y$.
On utilise des parallèles à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées.
On n'est pas obligé de prolonger les parallèles à l'axe des abscisses jusqu'à l'axe des ordonnées.

On est dans le cas d'une construction en « toile d'araignée ».

On observe que la suite (u_n) n'est pas monotone. En revanche, on observe que la sous-suite des termes d'indice pair est strictement croissante et la sous-suite des termes d'indice impair est strictement décroissante.
On peut démontrer ces résultats en utilisant un raisonnement par récurrence.



Avec la calculatrice, on obtient :
$u_1 = 2,718...$, $u_2 = 0,179...$, $u_3 = 2,271...$, $u_4 = 0,280...$, $u_5 = 2,0538...$, $u_6 = 0,3453...$

2°) On considère la fonction Python `seuil(a)` qui prend pour argument un réel a strictement positif et qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $\left| u_n - 1 \right| \leqslant a$.
Compléter les instructions manquantes dans l'encadré ci-dessous.

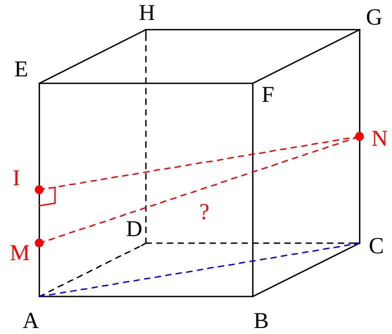
```
from math import exp

def seuil(a):
    u=0
    n=0
    while abs(u-1)>a:
          u=exp(1-u)
          n=n+1
     return n
```

Cette fonction montre la convergence très lente de la suite vers 1.
En effet, l'appel de la commande `seuil(0.1)` renvoie la valeur 566 et l'appel de la commande `seuil(0.01)` renvoie la valeur 59692.

Bonus :

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 4.
On note M le point du segment $[\text{AE}]$ tel que $\text{AM} = 1$ et N le milieu du segment $[\text{CG}]$.
Calculer la distance MN.



On note I le milieu de $[\text{AE}]$.

On se place dans le triangle IMN rectangle en I (démonstration assez facile du fait qu'il est rectangle).

On a $\text{MN}^2 = \text{MI}^2 + \text{NI}^2$.

Or $\text{MI} = 1$ et $\text{NI} = \text{AC} = 4\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 4).

On obtient alors $\text{MN}^2 = 33$ ce qui donne $\text{MN} = \sqrt{33}$.

Autre méthode :

On munit l'espace d'un repère orthonormé bien choisi.
Le repère le plus naturel est le repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ avec $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AB}}$, $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}$, $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AE}}$.