Terminale experts

Interrogation écrite du mercredi 2 décembre 2020

Durée : 30 minutes
- Fiche
- Calculatrice autorisée

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points)

• Pour tout couple $(a\,;b)$ d'entiers relatifs, on note $\mathscr{D}(a\,;b)$ l'ensemble des diviseurs communs à *a* et *b*.

• On rappelle l'énoncé du lemme d'Euclide dans l'encadré ci-dessous.

> Soit *a*, *b*, *c*, *d* des entiers relatifs tels que $a=bc+d$.
> On a l'égalité d'ensembles $\mathscr{D}(a\,;b)=\mathscr{D}(b\,;d)$.

Soit *a* et *b* deux entiers relatifs. À partir de l'égalité $a=b\times1+a-b \quad (\mathrm{E})$, démontrer que $\mathscr{D}(a\,;b)=\mathscr{D}(b\,;a-b)$.

……

……

II. (3 points)

Calculer le module du nombre complexe $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

……

……

……

……

III. (4 points)

À tout nombre complexe *z* on associe la matrice $\mathrm{A}(z)=\begin{pmatrix} z & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \bar{z} \end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant de $\mathrm{A}(z)$ en donnant le résultat sous une forme simple en fonction du module de *z*.

Que peut-on en déduire pour la matrice $\mathrm{A}(z)$ pour tout nombre complexe *z* ?

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

IV. (3 points)

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Pour tout nombre complexe *z*, on a $\left|(1-\mathrm{i})\overline{z}\right| = \sqrt{2}\,|\,z\,|$.

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

V. (3 points)

Soit *a* et *b* deux réels tels que $a^2+b^2=1$.
Calculer le module du nombre complexe $z=a(1+\mathrm{i})+b(1-\mathrm{i})$.

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $-2\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}-4$.

1°) Calculer AB.

……………… (une seule égalité)

2°) Soit M un point quelconque de *P* d'affixe *z*. Exprimer AM en fonction de *z* sous forme d'un module.

………………… (une seule égalité)

Conseils donnés à l'oral

II. Les traits de racines carrées doivent être faits à la règle.

Corrigé de l'interrogation écrite du 2-12-2020

I.

● Pour tout couple $(a\,;b)$ d'entiers relatifs, on note $\mathscr{D}(a\,;b)$ l'ensemble des diviseurs communs à *a* et *b*.

● On rappelle l'énoncé du lemme d'Euclide dans l'encadré ci-dessous.

> Soit *a*, *b*, *c*, *d* des entiers relatifs tels que $a = bc + d$.
> On a l'égalité d'ensembles $\mathscr{D}(a\,;b) = \mathscr{D}(b\,;d)$.

Soit *a* et *b* deux entiers relatifs. À partir de l'égalité $a = b \times 1 + a - b \quad (\mathrm{E})$, démontrer que $\mathscr{D}(a\,;b) = \mathscr{D}(b\,;a-b)$.

Il est possible de rajouter des parenthèses dans l'égalité (E) pour mieux voir : $a = b \times 1 + (a-b)$.
Ce n'est cependant pas forcément obligatoire.

On pose $c = 1$ et $d = a - b$.

L'égalité (E) s'écrit $a = bc + d$.

De plus, *c* est un entier relatif et *d* aussi puisque *a* et *b* sont des entiers relatifs.

D'après le lemme d'Euclide, on a $\mathscr{D}(a\,;b) = \mathscr{D}(b\,;a-b)$.

II.

Calculer le module du nombre complexe $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

$$|\,z\,| = \sqrt{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2+\cancel{\sqrt{2}}+2-\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

III.

À tout nombre complexe *z* on associe la matrice $\mathrm{A}(z) = \begin{pmatrix} z & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \overline{z} \end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant de $\mathrm{A}(z)$ en donnant le résultat sous une forme simple en fonction du module de *z*.
Que peut-on en déduire pour la matrice $\mathrm{A}(z)$ pour tout nombre complexe *z* ?

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \det \mathrm{A}(z) = z\bar{z} - \mathrm{i}^2$

$= |z|^2 + 1$

On peut voir immédiatement que $\forall z \in \mathbb{C} \quad \det \mathrm{A}(z) \neq 0$.

On en déduit que la matrice $\mathrm{A}(z)$ est inversible pour tout nombre complexe z.

IV.

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Pour tout nombre complexe z, on a $\left|(1-\mathrm{i})\bar{z}\right| = \sqrt{2}|z|$.

La proposition est vraie.

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \left|(1-\mathrm{i})\bar{z}\right| = |1-\mathrm{i}| \times |\bar{z}|$ (le module d'un produit est égal au produit des modules)

$= \sqrt{1^2 + (-1)^2} \times |z|$ (le module du conjugué de z est égal au module de z)

$= \sqrt{2}|z|$

V.

Soit a et b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$.
Calculer le module du nombre complexe $z = a(1+\mathrm{i}) + b(1-\mathrm{i})$.

On commence par écrire z sous forme algébrique.

$z = a + b + \mathrm{i}(a-b)$

$|z| = \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2}$

$= \sqrt{a^2 + \cancel{2ab} + b^2 + a^2 - \cancel{2ab} + b^2}$

$= \sqrt{2a^2 + 2b^2}$

$= \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

$= \sqrt{2 \times 1}$

$= \sqrt{2}$

VI.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives -2i et $\text{i}-4$.

1°) Calculer AB.

$$\text{AB} = 5 \quad \text{(une seule égalité)}$$

2°) Soit M un point quelconque de P d'affixe z. Exprimer AM en fonction de z sous forme d'un module.

$$\text{AM} = \left| z + 2\text{i} \right| \quad \text{(une seule égalité)}$$