T1 spécialité

Interrogation écrite du jeudi 12 novembre 2020

Durée : 40 minutes
- Ni fiche
- Calculatrice autorisée

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 3 points + 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = a$ et $u_1 = b$ où a et b sont deux réels donnés ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Dans cette question, on prend $a = 0$ et $b = 0$. Que peut-on dire de la suite (u_n) dans ce cas ?

………..

2°) Dans cette question, on suppose que $b = 2a$ avec a non nul. Que peut-on dire de la suite (u_n) dans ce cas ?

………..

3°) Dans cette question, on suppose que a et b sont des réels quelconques. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 en fonction de a et b (sous la forme la plus simple possible bien évidemment).

$u_2 =$ ………….. $u_3 =$ ………….. $u_4 =$ ………….. $u_5 =$ ………….. $u_6 =$ ………….. $u_7 =$ …………..

Que peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ? Répondre par une phrase.
Donner l'expression de u_{2020} en fonction de a et b.

………..

…………………….. (une seule égalité)

II. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ pour tout entier naturel n.

Exprimer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

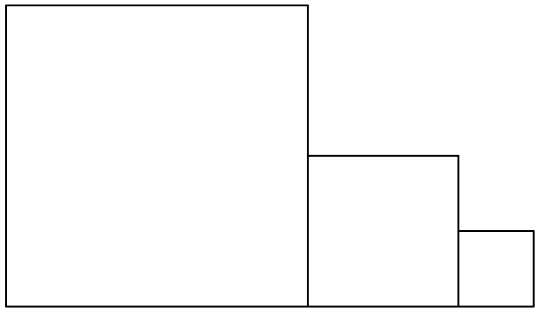
………..

………..

………..

III. (5 points : 2 points + 1 point + 2 points)

On considère un carré de côté *a* cm (carré numéro 1) où *a* est un réel strictement positif donné. À chaque étape, on construit un carré dont le côté mesure la moitié du côté du carré de l'étape précédente.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n l'aire du *n*-ième carré en cm^2. On a donc $u_1 = a^2$.



Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ …………………… (une seule égalité)

……..

Exprimer u_n en fonction de *n* et de *a*.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ …………………… (une seule égalité)

IV. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

Les autorités sanitaires d'un pays souhaitent engager un plan d'action afin de baisser la vente de boîtes d'un médicament de 2 % chaque année. En l'an 2019, la vente s'élevait à 192 millions de boîtes.
Pour tout entier naturel *n*, on note u_n le nombre de boîtes de médicament en millions vendues pendant l'année $2019+n$ dans ce pays selon le modèle envisagé.
On a donc $u_0 = 192$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

$\forall n \in \mathbb{N}$ …………………… (une seule égalité)

……..

Exprimer u_n en fonction de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}$ …………………… (une seule égalité)

2°) Exprimer en fonction de *n*, sous forme simplifiée, le nombre total de boîtes vendues selon ce modèle entre les années 2019 et $2019+n$ (ces deux années étant incluses).

……………………………………………… (une seule expression sans égalité et sans dénominateur)

Corrigé de l'interrogation écrite du 12-11-2020

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = a$ et $u_1 = b$ où a et b sont deux réels donnés ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Dans cette question, on prend $a = 0$ et $b = 0$. Que peut-on dire de la suite (u_n) dans ce cas ?

Dans ce cas, la suite (u_n) est constante (tous les termes sont nuls).

2°) Dans cette question, on suppose que $b = 2a$ avec a non nul. Que peut-on dire de la suite (u_n) dans ce cas ?

Dans ce cas, la suite (u_n) est périodique de période 6.

Comme dans la question suivante, on calcule les premiers termes de la suite.

$$u_2 = a \qquad u_3 = -a \qquad u_4 = -2a \qquad u_5 = -a \qquad u_6 = a \qquad u_7 = 2a$$

3°) Dans cette question, on suppose que a et b sont des réels quelconques. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 en fonction de a et b (sous la forme la plus simple possible bien évidemment).

$$u_2 = b - a \qquad u_3 = -a \qquad u_4 = -b \qquad u_5 = a - b \qquad u_6 = a \qquad u_7 = b$$

Que peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ? Répondre par une phrase.
Donner l'expression de u_{2020} en fonction de a et b.

Dans ce cas, la suite (u_n) est périodique de période 6.

$$u_{2020} = -b \text{ (une seule égalité)}$$

On a $2020 = 336 \times 6 + 4$. Par conséquent, $u_{2020} = u_4$.

On peut observer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = -u_n$.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ pour tout entier naturel n.

Exprimer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}}$$

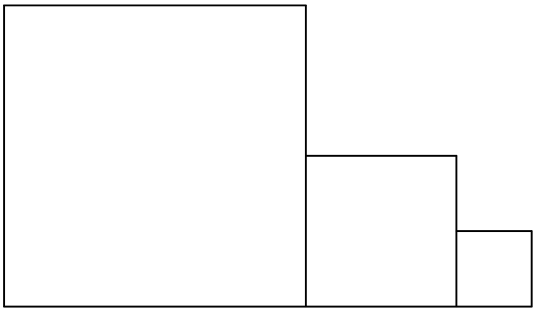
$$= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n}$$

$$= \frac{\cancel{2^n} \times 2}{\cancel{n!} \times (n+1)} \times \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}}$$

$$= \frac{2}{n+1}$$

III.

On considère un carré de côté *a* cm (carré numéro 1) où *a* est un réel strictement positif donné. À chaque étape, on construit un carré dont le côté mesure la moitié du côté du carré de l'étape précédente.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n l'aire du *n*-ième carré en cm^2. On a donc $u_1 = a^2$.



Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{4} \text{ (une seule égalité)}$$

Le côté de chaque carré (sauf le premier) est égal à la moitié du précédent donc l'aire de chaque carré est égale à l'aire du précédent multipliée par $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Exprimer u_n en fonction de *n* et de *a*.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{a^2}{4^{n-1}} \text{ (une seule égalité)}$$

IV.

Les autorités sanitaires d'un pays souhaitent engager un plan d'action afin de baisser la vente de boîtes d'un médicament de 2 % chaque année. En l'an 2019, la vente s'élevait à 192 millions de boîtes.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de boîtes de médicament en millions vendues pendant l'année $2019+n$ dans ce pays selon le modèle envisagé.
On a donc $u_0 = 192$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 0,98u_n \quad \text{(une seule égalité)}$$

Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 2 % est $1-\dfrac{2}{100}=0,98$.
On exprime toujours un coefficient multiplicateur associé à une augmentation ou une diminution en pourcentage sous forme décimale.

(u_n) est une suite géométrique de raison 0,98.

Exprimer u_n en fonction de n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 192 \times 0,98^n \quad \text{(une seule égalité)}$$

2°) Exprimer en fonction de n, sous forme simplifiée, le nombre total de boîtes vendues selon ce modèle entre les années 2019 et $2019+n$ (ces deux années étant incluses).

$$9600\left(1-0,98^{n+1}\right) \quad \text{(une seule expression sans égalité et sans dénominateur)}$$

Le nombre total de boîtes vendues selon ce modèle entre les années 2019 et $2019+n$ est donné par la somme $S_n = u_0 + \ldots + u_n$.

Comme la suite (u_n) est une suite géométrique, on a

$$S_n = 192 \times \frac{1-0,98^{n+1}}{1-0,98} = 192 \times \frac{1-0,98^{n+1}}{0,02} = \frac{192}{0,02}\left(1-0,98^{n+1}\right) = 9600\left(1-0,98^{n+1}\right).$$

On n'oublie pas de tester la formule pour $n=0$.
On obtient 192 c'est-à-dire la valeur de u_0 ce qui est tout à fait logique.