T experts

Contrôle du mercredi 14 octobre 2020 (50 minutes)

À disposition :
- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ….. / 20

Date de naissance : ………………………..

I. (5 points : 1 point par équation)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$\dfrac{z}{z-2}=\text{i}\quad(1)\qquad 1-\dfrac{2}{\overline{z}}=\text{i}\quad(2)\qquad 3+\dfrac{z^2}{2}=0\quad(3)\qquad 1-\dfrac{\text{i}z-1}{2}=0\quad(4)\qquad z^3-2z^2+2z=0\quad(5).$

Écrire les ensembles de solutions sur la deuxième ligne du tableau ci-dessous.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

Écrire sur les lignes suivantes la résolution des équations (1) et (2) pour les élèves nés un mois pair et la résolution des équations (3) et (4) pour les élèves nés un mois impair.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (2 points)

On pose $Z=(\text{i}-1)\overline{z}-2\text{i}$ où z est un nombre complexe quelconque.
Choisir parmi les expressions ci-dessous celle qui donne le conjugué de Z.

a	b	c
$(\text{i}+1)z+2\text{i}$	$2\text{i}-(\text{i}+1)z$	$(\text{i}-1)z+2\text{i}$

Réponse choisie : ……… (écrire uniquement la lettre)

Justifier le choix sur les lignes ci-dessous :

……

……

……

III. (2 points)

Résoudre le système $\begin{cases} z-z'=\text{i} \\ \text{i}z+z'=1 \end{cases}$ d'inconnue $(z\,;z')\in\mathbb{C}^2$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) Rappeler sans la justifier la règle donnant i^n suivant les valeurs de l'entier naturel *n*.
On rédigera ainsi : « Si *n* est de la forme … avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{i}^n = ...$ ».

- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………

2°) Soit *z* un imaginaire pur non nul. Compléter l'équivalence :

z^n est un réel strictement négatif si et seulement si ………………………………………………………………

V. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit *n* un entier naturel. On considère le polynôme $P(z) = \left(z^{n+1} + z^n\right)^2$ où *z* est un nombre complexe.

1°) Quel est le degré de $P(z)$?

……………………… (une seule réponse)

2°) Démontrer que pour tout nombre complexe *z* on a $P(z) = z^{2n}(z+1)^2$. On justifiera par un calcul en deux lignes.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) Calculer $P(\mathrm{i})$ en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VI. (3 points)

Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$, $z_{\mathrm{B}} = 2 + 2\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{C}} = \dfrac{4}{3}$.
Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (résultats sous forme algébrique).
Que peut-on dire des points A, B, C ? Justifier.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 14-10-2020

I.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$\dfrac{z}{z-2}=\text{i} \quad (1) \qquad 1-\dfrac{2}{\overline{z}}=\text{i} \quad (2) \qquad 3+\dfrac{z^2}{2}=0 \quad (3) \qquad 1-\dfrac{\text{i}z-1}{2}=0 \quad (4) \qquad z^3-2z^2+2z=0 \quad (5)$.

Écrire les ensembles de solutions sur la deuxième ligne du tableau ci-dessous.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$S_1=\{1-\text{i}\}$	$S_2=\{1-\text{i}\}$	$S_3=\left\{\text{i}\sqrt{6}\,;-\text{i}\sqrt{6}\right\}$	$S_4=\{-3\text{i}\}$	$S_5=\{0\,;1-\text{i}\,;1+\text{i}\}$

Écrire sur les lignes suivantes la résolution des équations (1) et (2) pour les élèves nés un mois pair et la résolution des équations (3) et (4) pour les élèves nés un mois impair.

Pour toutes les équations, on n'a pas besoin de poser $z=x+\text{i}y$ avec x et y réels.

$\dfrac{z}{z-2}=\text{i} \quad (1)$

2 est valeur interdite.

On résout (1) dans $\mathbb{C}\setminus\{2\}$.

$(1) \Leftrightarrow z=\text{i}(z-2)$

$\Leftrightarrow z-\text{i}z=-2\text{i}$

$\Leftrightarrow (1-\text{i})z=-2\text{i}$

$\Leftrightarrow z=-\dfrac{2\text{i}}{1-\text{i}}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-2\text{i}(1+\text{i})}{(1-\text{i})(1+\text{i})}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-\cancel{2}\text{i}(1+\text{i})}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow z=-\text{i}(1+\text{i})$

$\Leftrightarrow z=1-\text{i}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\{1-\text{i}\}$

$1-\dfrac{2}{\overline{z}}=\text{i} \quad (2)$

0 est valeur interdite de (2).

On résout (2) dans $\mathbb{C}^*$.

$(2) \Leftrightarrow \dfrac{2}{\overline{z}}=1-\text{i}$

$\Leftrightarrow 2=(1-\text{i})\overline{z}$

$\Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{2}{1-\text{i}}$

$\Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{2\times(1+\text{i})}{(1-\text{i})(1+\text{i})}$

$\Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{\cancel{2}\times(1+\text{i})}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow \overline{z}=1+\text{i}$

$\Leftrightarrow z=1-\text{i}$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\{1-\text{i}\}$

$3+\dfrac{z^2}{2}=0 \quad (3)$

$(3) \Leftrightarrow z^2=-6$

$\Leftrightarrow z=\text{i}\sqrt{6}$ ou $z=-\text{i}\sqrt{6}$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3=\left\{\text{i}\sqrt{6}\,;-\text{i}\sqrt{6}\right\}$

$1-\dfrac{iz-1}{2}=0 \quad (4)$

$(4) \Leftrightarrow 1=\dfrac{iz-1}{2}$

$\Leftrightarrow iz-1=2$

$\Leftrightarrow iz=3$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{3}{i}$

$\Leftrightarrow z=-3i$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$S_4=\{-3i\}$

$z^3-2z^2+2z=0 \quad (5)$

$(5) \Leftrightarrow z\left(z^2-2z+2\right)=0$

$\Leftrightarrow z=0$ ou $z^2-2z+2=0$

$\Leftrightarrow z=0$ ou $z=1+i$ ou $z=1-i$

Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5).

$S_5=\{0\,;1-i\,;1+i\}$

On vérifie à l'aide de la calculatrice.

II.

On pose $Z=(i-1)\overline{z}-2i$ où z est un nombre complexe quelconque.
Choisir parmi les expressions ci-dessous celle qui donne le conjugué de Z.

a	b	c
$(i+1)z+2i$	$2i-(i+1)z$	$(i-1)z+2i$

Réponse choisie : $2i-(i+1)z$ (écrire uniquement la lettre)

Justifier le choix sur les lignes ci-dessous :

$\overline{Z}=\overline{(i-1)\overline{z}-2i}$

$=(-i-1)z+2i$

$=-(i+1)z+2i$

$=2i-(i+1)z$

III.

Résoudre le système $\begin{cases} z-z'=i \\ iz+z'=1 \end{cases}$ d'inconnue $(z\,;z')\in\mathbb{C}^2$.

Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z-z'=i & (1) \\ iz+z'=1 & (2) \end{cases}$ d'inconnue $(z\,;z')\in\mathbb{C}^2$.

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations.

Calculons son déterminant *D*.

$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ i & 1 \end{vmatrix}=1\times1-i\times(-1)=1+i$

$D\neq0$ donc le système admet un unique couple solution dans $\mathbb{C}^2$.

On résout le système par combinaisons (on peut aussi utiliser la substitution, mais c'est plus maladroit).

Pour obtenir le couple solution, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases} z-z'=i \\ iz+z'=1 \end{cases} \begin{vmatrix} \times1 \\ \times1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \times(-i) \\ \times1 \end{vmatrix}$$

$\downarrow$ pour annuler les z' $\qquad$ $\downarrow$ pour annuler les z

$$\begin{cases} z-z'=i \\ iz+z'=1 \end{cases} \begin{vmatrix} \times1 \\ \times1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \times(-i) \\ \times1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1+\mathrm{i})z=\mathrm{i}+1\\(\mathrm{i}+1)z'=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z=1\\z'=\dfrac{2}{\mathrm{i}+1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z=1\\z'=\dfrac{\cancel{2}(1-\mathrm{i})}{\cancel{2}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z=1\\z'=1-\mathrm{i}\end{cases}$$

Le couple solution du système est $(1\,;1-\mathrm{i})$.

L'ensemble des solutions du système est $S=\{(1\,;1-\mathrm{i})\}$.

On effectue une vérification rapide.

IV.

1°) Rappeler sans la justifier la règle donnant i^n suivant les valeurs de l'entier naturel *n*.
On rédigera ainsi : « Si *n* est de la forme … avec $k\in\mathbb{N}$, alors $\mathrm{i}^n=......$ ».

- Si *n* est de la forme $4k$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors $\mathrm{i}^n=1$.
- Si *n* est de la forme $4k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors $\mathrm{i}^n=\mathrm{i}$.
- Si *n* est de la forme $4k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors $\mathrm{i}^n=-1$.
- Si *n* est de la forme $4k+3$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors $\mathrm{i}^n=-\mathrm{i}$.

2°) Soit *z* un imaginaire pur non nul. Compléter l'équivalence :

z^n est un réel strictement négatif si et seulement si *n* est de la forme $4k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$.

Soit *z* un imaginaire pur non nul.

On pose $z=\mathrm{i}a$ où *a* est un réel non nul.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad z^n=\mathrm{i}^n a^n$

- Si *n* est de la forme $4k$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors $z^n=a^n$.
- Si *n* est de la forme $4k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors $z^n=\mathrm{i}a^n$.
- Si *n* est de la forme $4k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors $z^n=-a^n$.
- Si *n* est de la forme $4k+3$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors $z^n=-\mathrm{i}a^n$.

On en déduit que $z^n\in\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow n=4k+2\;\;(k\in\mathbb{N})$.

V.

Soit *n* un entier naturel. On considère le polynôme $P(z)=\left(z^{n+1}+z^n\right)^2$ où *z* est un nombre complexe.

1°) Quel est le degré de $P(z)$?

$$\deg\left[P(z)\right]=2n+2 \text{ (une seule réponse)}$$

On effectue un développement de $P(z)$ (au moins mentalement) $\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=z^{2n+2}+z^{2n}+2z^{2n+1}$.
L'objectif est d'obtenir le monôme de plus haut degré.

2°) Démontrer que pour tout nombre complexe *z* on a $P(z)=z^{2n}(z+1)^2$. On justifiera par un calcul en deux lignes.

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=\left(z^{n+1}+z^n\right)^2$$

$$=\left[z^n(z+1)\right]^2$$

$$=z^{2n}(z+1)^2$$

3°) Calculer $P(\mathrm{i})$ en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible.

$$P(\mathrm{i})=\mathrm{i}^{2n}(\mathrm{i}+1)^2$$

$$=\left(\mathrm{i}^2\right)^n\times 2\mathrm{i}$$

$$=(-1)^n\times 2\mathrm{i}$$

VI.

Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \dfrac{2}{1+\text{i}}$, $z_{\text{B}} = 2+2\text{i}$, $z_{\text{C}} = \dfrac{4}{3}$.

Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ (résultats sous forme algébrique).

Que peut-on dire des points A, B, C ? Justifier.

On commence par écrire $z_{\text{A}} = \dfrac{2}{1+\text{i}}$ sous forme algébrique.

$$z_{\text{A}} = \frac{2\left(1-\text{i}\right)}{\left(1+\text{i}\right)\left(1-\text{i}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(1-\text{i}\right)}{\cancel{2}}$$

$$= 1-\text{i}$$

On peut vérifier le calcul à la calculatrice.

On calcule $z_{\overrightarrow{\text{AB}}}$ et $z_{\overrightarrow{\text{AC}}}$.

$$z_{\overrightarrow{\text{AB}}} = z_{\text{B}} - z_{\text{A}}$$

$$= \left(2+2\text{i}\right) - \left(1-\text{i}\right)$$

$$= 1+3\text{i}$$

$$z_{\overrightarrow{\text{AC}}} = z_{\text{C}} - z_{\text{A}}$$

$$= \frac{4}{3} - \left(1-\text{i}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \text{i}$$

On constate que $z_{\overrightarrow{\text{AC}}} = \dfrac{1}{3} z_{\overrightarrow{\text{AB}}}$.

Par conséquent, on a $\overrightarrow{\text{AC}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}$ (on revient aux vecteurs).

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont colinéaires.

Par suite A, B, C sont alignés.