T spécialité

Contrôle du jeudi 15 octobre 2020 (50 minutes)

À disposition :
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………………

Note : ….. / 20

Date de naissance : ………………………..

I. (2 points)

Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \mathrm{e}^x - \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Faire le calcul directement sans phrase introductive ; rédiger une phrase de conclusion.

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (2 points)

Exprimer en fonction de $\ln a$ les expressions $\mathrm{A} = 3\ln\left(a^2\right) - \ln\dfrac{1}{a}$ et $\mathrm{B} = 4\ln\sqrt{a} + \ln\dfrac{1}{a^3}$ où a un réel strictement positif quelconque.

………………………… …………………………

III. (3 points)

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x\ln x$ (donner le résultat sous la forme la plus simple possible) et vérifier que f est une solution de l'équation différentielle $xy' - y = x \quad (\mathrm{E})$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left|x^2 - 4\right|$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ (répondre par une seule égalité à recopier et compléter : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\} \quad f'(x) = \ldots\ldots$).

2°) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 (écrire la réponse <u>sans égalité</u>).

1°) ……………………………………………………… 2°) …………

V. (2 points) Questions de cours à compléter directement sans explications

1°) $\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} \ldots\ldots$ 2°) Pour tout entier relatif n, $\ln \mathrm{e}^n = \ldots\ldots$.

VI. (4 points : 2 points + 2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6 \quad (1)$ et l'inéquation $\ln\left(x^2 - x - 2\right) > 2\ln(3 - x) \quad (2)$.

Écrire ci-dessous les ensembles de solutions respectifs S_1 et S_2 de (1) et (2).

………

Sur les lignes ci-dessous, on détaillera la résolution de (1) pour les élèves nés un mois pair et la résolution de (2) pour les élèves nés un mois impair.
On commencera par donner l'ensemble de résolution sans explication.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

VII. (3 points)

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 10^{2020}$ (1).

Indication : On se ramènera à une inégalité de la forme $a^n > b$ où a et b sont deux réels strictement positifs et on pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

VIII. (2 points)

On considère les fonctions $f : x \mapsto \ln(x+1)$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 1$.

On note h la composée de g suivie de f (autrement dit : $h = f \circ g$).

Exprimer $h(x)$ en fonction de x (x étant un réel quelconque) sous la forme la plus simple possible.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) =$ ....

Corrigé du contrôle du 15-10-2020

I.

Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \mathrm{e}^x - \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Faire le calcul directement sans phrase introductive ; rédiger une phrase de conclusion.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2x} + \cancel{\mathrm{e}^x} - \cancel{\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}^x + 1}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}$$

$$= f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

II.

Exprimer en fonction de $\ln a$ les expressions $\mathrm{A} = 3\ln\left(a^2\right) - \ln\dfrac{1}{a}$ et $\mathrm{B} = 4\ln\sqrt{a} + \ln\dfrac{1}{a^3}$ où a un réel strictement positif quelconque.

$\mathrm{A} = 7\ln a$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{B} = -\ln a$

$$\mathrm{A} = 3\ln\left(a^2\right) - \ln\frac{1}{a}$$

$$= 3 \times 2\ln a - (-\ln a)$$

$$= 6\ln a + \ln a$$

$$= 7\ln a$$

$$\mathrm{B} = 4\ln\sqrt{a} + \ln\frac{1}{a^3}$$

$$= 4 \times \frac{\ln a}{2} - \ln\left(a^3\right)$$

$$= 2\ln a - 3\ln a$$

$$= -\ln a$$

III.

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x\ln x$ (donner le résultat sous la forme la plus simple possible) et vérifier que f est une solution de l'équation différentielle $xy' - y = x \quad (\mathrm{E})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$$

$$= \ln x + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad xf'(x) - f(x) = x(\ln x + 1) - x\ln x$$

$$= x$$

f est donc une solution de l'équation différentielle (E).

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left|x^2 - 4\right|$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ (répondre par une seule égalité à recopier et compléter : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\} \quad f'(x) = \ldots\ldots.$).

2°) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 (écrire la réponse <u>sans égalité</u>).

1°) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\} \quad f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ $\qquad\qquad$ 2°) $-\dfrac{2}{3}$

2°) On calcule $f'(1) = -\dfrac{2}{3}$.

V. Questions de cours à compléter directement sans explications

1°) $\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ $\qquad\qquad$ 2°) Pour tout entier relatif n, $\ln \mathrm{e}^n = n$.

VI.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6 \quad (1)$ et l'inéquation $\ln\left(x^2 - x - 2\right) > 2\ln(3 - x) \quad (2)$.

Écrire ci-dessous les ensembles de solutions respectifs S_1 et S_2 de (1) et (2).

$S_1 = \{3\}$ $\qquad\qquad$ $S_2 = \left]\dfrac{11}{5}\,;3\right[$

Sur les lignes ci-dessous, on détaillera la résolution de (1) pour les élèves nés un mois pair et la résolution de (2) pour les élèves nés un mois impair.

On commencera par donner l'ensemble de résolution sans explication.

• Résolution de l'équation (1) :

On commence par déterminer l'ensemble de résolution de (1).

Pour cela, on doit résoudre le système $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$.

Ce système est équivalent de manière évidente à $x > 1$.

L'ensemble de résolution de (1) est donc l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

$(1) \Leftrightarrow \ln\left[x\times(x-1)\right]=\ln 6$

$\Leftrightarrow x(x-1)=6$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ (racine évidente) ou $x=3$ (valeur obtenue par le produit des racines)

Compte tenu de l'ensemble de résolution, on ne retient que 3 pour solution.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\{3\}$

• Résolution de l'inéquation (2) :

On commence par déterminer l'ensemble de résolution.

Pour cela, on doit résoudre le système d'inéquations $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ 3-x<0 \end{cases}$.

On est amené à considérer le polynôme x^2-x-2 dont les racines sont – 1 et 2 (racines évidentes).

Le système est donc équivalent à $\begin{cases} x<-1 \text{ ou } x>2 \\ x<3 \end{cases}$.

L'ensemble de résolution de (2) est donc $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2\,;3[$ (réunion de deux intervalles disjoints).

$(2) \Leftrightarrow \ln\left(x^2-x-2\right)>\ln\left[(3-x)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2-x-2>(3-x)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-x-2>9-6x+\cancel{x^2}$

$\Leftrightarrow 5x>11$

$\Leftrightarrow x>\dfrac{11}{5}$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

On fait l'intersection $\left(]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2\,;3[\right)\cap\left]\dfrac{11}{5}\,;+\infty\right[$. On peut s'aider d'un schéma sur un axe représentant la droite réelle.

$S_2=\left]\dfrac{11}{5}\,;3\right[$

VII.

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=3$ et de raison 2.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n>10^{2020}$ (1).

Indication : On se ramènera à une inégalité de la forme $a^n>b$ où a et b sont deux réels strictement positifs et on pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=3\times 2^n$.

$(1) \Leftrightarrow 3\times 2^n>10^{2020}$

$\Leftrightarrow \ln\left(3\times 2^n\right)>\ln\left(10^{2020}\right)$

$\Leftrightarrow \ln 3+\ln\left(2^n\right)>2020\ln 10$

$\Leftrightarrow n\ln 2>2020\ln 10-\ln 3$

$\Leftrightarrow n>\dfrac{2020\ln 10-\ln 3}{\ln 2}$ (on ne change pas le sens de l'inégalité puisque $\ln 2>0$)

Avec la calculatrice, on trouve $\dfrac{2020\ln 10-\ln 3}{\ln 2}=6708{,}709...$.

Le plus petit entier naturel n vérifiant (1) est donc 6709.

Complément :

On peut aussi utiliser le logarithme décimal.

On obtient $n>\dfrac{2020-\log 3}{\log 2}$.

VIII.

On considère les fonctions $f : x\mapsto \ln(x+1)$ et $g : x\mapsto \mathrm{e}^{2x}-1$.
On note h la composée de g suivie de f (autrement dit : $h=f\circ g$).
Exprimer $h(x)$ en fonction de x (x étant un réel quelconque) sous la forme la plus simple possible.

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad h(x)=2x$$

$h=f\circ g$ donc g est « à l'intérieur » de f.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h(x) &= f\left[g(x)\right] \\ &= \ln\left(e^{2x} - 1 + 1\right) \\ &= \ln e^{2x} \\ &= 2x\end{aligned}$$