T$^{\text{ale}}$ spécialité

Contrôle du samedi 3 octobre 2020 (2 heures)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note :** …….. **/ 20**

I. (1 point)

Soit x un réel quelconque.

Simplifier l'expression $\text{A}=\dfrac{\text{e}^{3x}-\text{e}^{x}}{\text{e}^{2x}+\text{e}^{x}}$ en donnant un résultat sans quotient.

……

……

……

II. (1 point)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{\text{e}^{3x}}{2\left(\text{e}^{2x}\right)^2}-\text{e}^{-x}\leqslant -1 \quad (1)$.

……

……

……

……

……

……

III. (1 point)

Vérifier que la fonction $\text{F} : x \mapsto \left(x^2-4x+5\right)\text{e}^{x}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto (x-1)^2\,\text{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

……

……

……

……

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x-\text{e}^{\frac{x}{2}}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$.

…………………………………………………..……………………

Compléter la phrase suivante :

f' s'annule pour $x=$…… .

2°) Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

On admet que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty$ et que $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$. Compléter le tableau de variations avec ces limites.

Calculer la valeur exacte du (ou des) extremum(s) et compléter le tableau de variations.

……

……

……

……

3°) Calculer l'ordonnée du point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse ln 3 et le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

……

……

……

……

……

4°) Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point B d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées.

……

……

5°) Déterminer les coordonnées du point I de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite *D* d'équation $x+2y-1=0$.

……

……

……

……

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1-4x\text{e}^{-x}$.

1°) Vérifier que pour tout réel *x*, on a $f'(x)=4(x-1)\text{e}^{-x}$.

……

……

……

Compléter la phrase suivante :

f' s'annule pour $x=$...... .

2°) Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

Calculer la valeur exacte du (ou des) extremum(s) et compléter le tableau de variations.

……

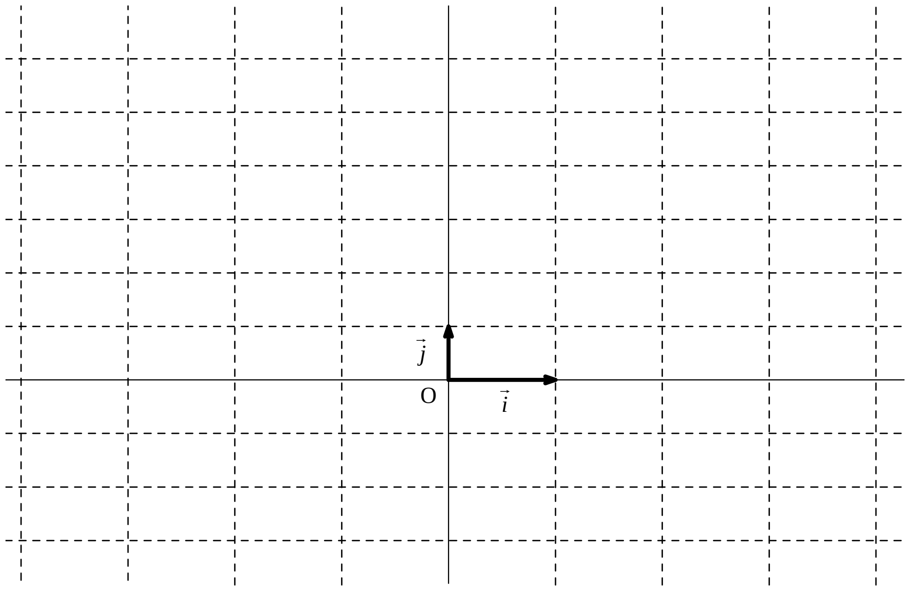
On admet que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ et que $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$. Compléter le tableau avec ces limites.

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Compléter la phrase :

$\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation ……………. pour asymptote ………… en …… .

Tracer avec soin la courbe $\mathcal{C}$, la droite Δ ainsi que la tangente horizontale sur le graphique.



Tracer la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 en expliquant le tracé.

………

………

4°) On admet qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 4$.

Localiser α entre deux entiers relatifs consécutifs puis déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α. On précisera la méthode utilisée.

………

………

………

………

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère l'équation différentielle $y^2 - y'^2 = 4 \quad (\mathrm{E})$.

1°) Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).

………

………

………

………

………

………

2°) Donner sans justifier une fonction g constante sur $\mathbb{R}$, solution de (E).

La fonction $g : x \mapsto \dots$ est une solution de (E).

VII. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Déterminer une racine évidente de $P(x)$ puis écrire une factorisation en produit de deux polynômes.

En déduire les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$.

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \left(x^3 - 6x^2 + 12x - 10\right)e^x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

À l'aide de la question 1°), déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.

....

....

....

....

....

VIII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite D d'équation $y = x - 2$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bonus (1 point) :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{e^x - a}{e^x - b} \geqslant 0$ où a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

Corrigé du contrôle du 3-10-2020

I.

Soit x un réel quelconque.

Simplifier l'expression $\mathrm{A}=\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}}$ en donnant un résultat sans quotient.

$$\mathrm{A}=\frac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}}$$

$$=\frac{\cancel{\mathrm{e}^{x}}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\cancel{\mathrm{e}^{x}}\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}$$ (on factorise le numérateur et le dénominateur par e^{x})

$$=\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$$

$$=\frac{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}-1^{2}}{\mathrm{e}^{x}+1}$$

$$=\frac{\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\cancel{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}}{\cancel{\mathrm{e}^{x}+1}}$$ (factorisation par identité remarquable)

$$=\mathrm{e}^{x}-1$$

II.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{2\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{2}}-\mathrm{e}^{-x}\leqslant -1 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{3x}}{2\mathrm{e}^{4x}}-\mathrm{e}^{-x}\leqslant -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}-\mathrm{e}^{-x}\leqslant -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\leqslant -1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}\geqslant 2$$

$$\Leftrightarrow -x\geqslant \ln 2$$

$$\Leftrightarrow x\leqslant -\ln 2$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$$S=\left]-\infty\,;-\ln 2\right]$$

III.

Vérifier que la fonction $\mathrm{F}: x\mapsto \left(x^{2}-4x+5\right)\mathrm{e}^{x}$ est une primitive de la fonction $f: x\mapsto (x-1)^{2}\,\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations algébriques sur les fonctions dérivables.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x)=(2x-4)\mathrm{e}^{x}+\left(x^{2}-4x+5\right)\mathrm{e}^{x}$$ (dérivée d'un produit)

$$=\left[(2x-4)+\left(x^{2}-4x+5\right)\right]\mathrm{e}^{x}$$

$$=\left(x^{2}-2x+1\right)\mathrm{e}^{x}$$

$$=(x-1)^{2}\,\mathrm{e}^{x}$$

$$=f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

IV.

On considère la fonction $f: x\mapsto x-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations algébriques sur les fonctions dérivables.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=1-\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2}$$

L'écriture $f(x)=x-\sqrt{\mathrm{e}^{x}}$ est correcte mais ne sert pas à grand chose ici.

Compléter la phrase suivante :

f' s'annule pour $x=2\ln 2$.

2°) Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

Le signe de $f'(x)$ s'obtient aisément en résolvant deux inéquations et une équation.

x	$-\infty$		$2\ln 2$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$2\ln 2-2$	$\searrow$	$-\infty$

On admet que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty$ et que $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$. Compléter le tableau de variations avec ces limites.

Calculer la valeur exacte du (ou des) extremum(s) et compléter le tableau de variations.

$$f(2\ln 2)=2\ln 2-\mathrm{e}^{\frac{2\ln 2}{2}}$$

$$=2\ln 2-\mathrm{e}^{\ln 2}$$

$$=2\ln 2-2$$

3°) Calculer l'ordonnée du point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse ln 3 et le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

$$f(\ln 3)=\ln 3-\mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{2}}$$

$$=\ln 3-\sqrt{\mathrm{e}^{\ln 3}}$$

$$=\ln 3-\sqrt{3}$$

$$f'(\ln 3)=1-\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{2}}}{2}$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4°) Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point B d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées.

$$f'(0)=1-\frac{\mathrm{e}^{0}}{2}$$

$$=1-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

5°) Déterminer les coordonnées du point I de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite D d'équation $x+2y-1=0$.

D a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

On est donc amené à résoudre l'équation $f'(x)=-\frac{1}{2}$ (1).

$$(1)\Leftrightarrow 1-\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\ln 3$$

$$\Leftrightarrow x=2\ln 3$$

On calcule $f(2\ln 3)=2\ln 3-\mathrm{e}^{\ln 3}=2\ln 3-3$.

Le point I de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à D a pour coordonnées $(2\ln 3\,;2\ln 3-3)$.

V.

On considère la fonction $f : x\mapsto 1-4x\mathrm{e}^{-x}$.

1°) Vérifier que pour tout réel x, on a $f'(x)=4(x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations algébriques sur les fonctions dérivables.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=-4\times\left(1\times\mathrm{e}^{-x}+x\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right)$$

$$=-4(1-x)\mathrm{e}^{-x}$$

$$=4(x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

Compléter la phrase suivante :

f' s'annule pour $x=1$.

2°) Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
Signe de e^x		$+$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de *f*	$+\infty$	$\searrow$	$1-\frac{4}{e}$	$\nearrow$	1

Calculer la valeur exacte du (ou des) extremum(s) et compléter le tableau de variations.

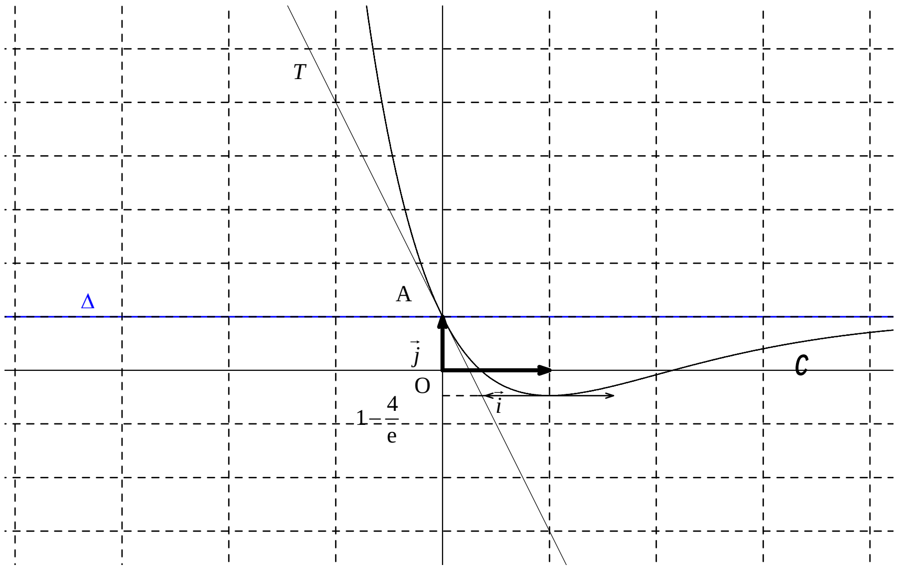
$$f(1)=1-4\times1\times e^{-1}=1-\frac{4}{e}$$

On admet que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ et que $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$. Compléter le tableau avec ces limites.

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Compléter la phrase :

$\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

Tracer avec soin la courbe $\mathcal{C}$, la droite Δ ainsi que la tangente horizontale sur le graphique.



On place d'abord le point d'abscisse 1 et la tangente horizontale en ce point.
Ensuite, on trace l'asymptote horizontale puis on place quelques points.

Tracer la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 en expliquant le tracé.

Le coefficient directeur de *T* est égal au nombre dérivé de *f* en 0.

On a $f'(0)=4(0-1)\times e^{-0}=-4$ donc la tangente *T* à $\mathcal{C}$ en A a pour coefficient directeur – 4.

4°) On admet qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=4$.
Localiser α entre deux entiers relatifs consécutifs puis déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α. On précisera la méthode utilisée.

On observe aisément sur le graphique que $-1<\alpha<0$. On peut aussi le vérifier en constatant que $f(-1)>4$ et $f(0)<4$.

On se place sur l'intervalle $[-1;0]$.
La fonction *f* est strictement décroissante sur cet intervalle.

On utilise la méthode de balayage.

On constate que $f(-0,5)>4$ et que $f(-0,4)<4$ donc $-0,5<\alpha<-0,4$.

On recommence avec l'intervalle $[-0,5;-0,4]$.
On constate que $f(-0,47)>4$ et que $f(-0,46)<4$ donc $-0,47<\alpha<-0,46$.

Ce dernier encadrement est en accord avec la valeur approchée de a obtenue grâce à la commande de résolution des équations de la calculatrice.

VI.

On considère l'équation différentielle $y^2-y'^2=4 \quad (\mathrm{E})$.

1°) Démontrer que la fonction $f : x \mapsto e^x+e^{-x}$ est une solution de (E).

Attention, on ne cherche pas du tout à résoudre l'équation (E). On cherche juste à vérifier que la fonction *f* est une solution de (E).

La fonction *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=e^x-e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left[f(x)\right]^2 - \left[f'(x)\right]^2 = \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$

$= \left(e^{2x} + 2e^x \times e^{-x} + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2e^x \times e^{-x} + e^{-2x}\right)$

$= \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)$

$= 4$

Donc la fonction f est une solution particulière de (E).

2°) Donner sans justifier une fonction g constante sur $\mathbb{R}$, solution de (E).

La fonction $g : x \mapsto 2$ est une solution de (E).

VII.

1°) On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
Déterminer une racine évidente de $P(x)$ puis écrire une factorisation en produit de deux polynômes.
En déduire les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$.

On a $P(1) = 0$ donc 1 est une racine de $P(x)$.
On sait que le polynôme $P(x)$ peut alors se factoriser par $(x-1)$ c'est-à-dire $P(x) = (x-1) \times Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme.

On obtient aisément $P(x) = (x-1)\left(x^2 - 2x - 2\right)$ (méthode en devinant / méthode des coefficients indéterminés / méthode de division euclidienne polynomiale).
On vérifie que cette égalité est correcte en développant le membre de droite.

Les racines du polynôme $x^2 - 2x - 2$ sont $1+\sqrt{3}$ et $1-\sqrt{3}$ (obtenues grâce au discriminant réduit).

Les racines de $P(x)$ sont donc 1, $1+\sqrt{3}$ et $1-\sqrt{3}$.

On effectue une vérification grâce à la calculatrice (résolution des équations polynomiales).

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \left(x^3 - 6x^2 + 12x - 10\right)e^x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
À l'aide de la question 1°), déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \left(3x^2 - 12x + 12\right) \times e^x + \left(x^3 - 6x^2 + 12x - 10\right)e^x$

$= \left(x^3 - 3x^2 + 2\right)e^x$

On constate que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = P(x)e^x$.

Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale sont les valeurs d'annulation de $f'(x)$.

On sait que e^x ne s'annule pas donc les valeurs d'annulation de $f'(x)$ sont les racines de $P(x)$.

Les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale ont pour abscisses 1, $1+\sqrt{3}$ et $1-\sqrt{3}$.

VIII.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon.

Soit M un point quelconque de P, de coordonnées $(x\,;y)$.

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 - 25 + (y-4)^2 - 16 + 33 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-4)^2 = 8$

La dernière égalité obtenue permet d'affirmer que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(5\,;4)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite D d'équation $y = x - 2$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation
$x^2 + (x-2)^2 - 10x - 8(x-2) + 33 = 0 \quad (1)$.

Cette équation s'appelle l'équation aux abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.

$(1) \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 4x + 4 - 10x - 8x + 16 + 33 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 22x + 53 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{11-\sqrt{15}}{2}$ ou $x = \dfrac{11+\sqrt{15}}{2}$ (on utilise le discriminant réduit)

$\Delta' = (-11)^2 - 2 \times 53$ $= 121 - 106$ $= 15$ $\Delta' > 0$ donc l'équation admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2 : $x_1 = \dfrac{11-\sqrt{15}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{11+\sqrt{15}}{2}$.

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D ont pour coordonnées $\left(\dfrac{11-\sqrt{15}}{2}\,;\,\dfrac{7-\sqrt{15}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{11+\sqrt{15}}{2}\,;\,\dfrac{7+\sqrt{15}}{2}\right)$.

On calcule les ordonnées de ces points grâce à l'équation réduite de D.

Bonus :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{\mathrm{e}^x-a}{\mathrm{e}^x-b}\geqslant 0$ où a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a<b$.

On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{\mathrm{e}^x-a}{\mathrm{e}^x-b}\geqslant 0 \quad (1)$.

1ère méthode : On dresse un tableau de signes.
Les valeurs charnières sont ln a et ln b.
Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln a<\ln b$.

On peut éventuellement effectuer un changement de variable $X=\mathrm{e}^x$.

2e méthode :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{e}^x-a\geqslant 0\\ \mathrm{e}^x-b\geqslant 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\mathrm{e}^x-a\leqslant 0\\ \mathrm{e}^x-b\leqslant 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

On obtient $S=\left]-\infty\,;\,\ln a\right]\cup\left]\ln b\,;\,+\infty\right[$.