1$^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 13 mars 2020 (50 minutes)

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………..……………………………. **Note : ….. / 20**

I. (3 points)

Déterminer le(s) réel(s) x tel(s) que $-x$, x^2, $2x$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
On commencera par traduire le problème en équation.

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

II. (2 points)

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -23$ et de raison $r = \sqrt{5}$.

Combien y a-t-il de termes négatifs ou nuls ?

……… (une seule réponse, sans égalité)

Combien y a-t-il de termes inférieurs ou égaux à 2020 ?

……… (une seule réponse, sans égalité)

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + n^2(n-4) - n(n-2)^2$ pour tout entier naturel n.
Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0 = 4$ et la relation de récurrence $2v_{n+1} = 2v_n - 1$ pour tout entier naturel n.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

IV. (2 points)

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $\frac{1}{4}$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{2020}$ grâce à la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Vérifier le résultat en utilisant la commande de la calculatrice permettant de calculer une somme.

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

$S = 8 + ... + 212$ est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique. On sait que $S = 5720$.

1°) Calculer le nombre de termes de la somme *S*.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) Quelle est la raison de la suite ?

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point)

Dans cet exercice, le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\,(m-1\,;-1)$ et $\vec{v}\,(2\,;2m+1)$ où *m* est un réel.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite *D* d'équation $y = 2x$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

VII. (2 points)

Soit ABCD un carré du plan *P* dont les côtés ont pour longueur 1. On note I et J les milieux respectifs de $[\mathrm{BC}]$ et $[\mathrm{CD}]$.

On munit le plan du repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.

Donner sans justifier les coordonnées de tous les points la figure le repère $\mathcal{R}$.

A	B	C	D	I	J
…………	…………	…………	…………	…………	…………
…………	…………	…………	…………	…………	…………

En utilisant les coordonnées, calculer au choix l'un des deux produits scalaires suivants : $p = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AJ}}$; $p' = \overrightarrow{\mathrm{DI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BJ}}$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 13-3-2020

Ce contrôle n'a pas eu lieu à cause de la fermeture des établissements scolaires à partir du soir même.

I.

Déterminer le(s) réel(s) x tel(s) que $-x$, x^2, $2x$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
On commencera par traduire le problème en équation.

On sait que trois réels a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $b=\dfrac{a+c}{2}$ ou encore si et seulement si $a+c=2b$.
Autrement dit, trois réels a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si b se situe « au milieu » de a et c (cf. images mentales associées avec la droite réelle).

On traduit donc le problème par une équation en prenant $a=-x$, $b=x^2$, $c=2x$.

Les réels cherchés sont les solutions de l'équation $2x^2=-x+2x \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 2x^2=x$ (la méthode de résolution de cette équation est simple : on passe tout dans le membre de gauche et on factorise)

$\Leftrightarrow 2x^2-x=0$

$\Leftrightarrow x(2x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $2x-1=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\dfrac{1}{2}$

Les réels cherchés sont 0 et $\dfrac{1}{2}$.

On vérifie que ces deux réels conviennent.

II.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=-23$ et de raison $r=\sqrt{5}$.

Combien y a-t-il de termes négatifs ou nuls ?

11 (une seule réponse, sans égalité)

Combien y a-t-il de termes inférieurs ou égaux à 2020 ?

914 (une seule réponse, sans égalité)

Pour la première question, on pourrait calculer les premiers termes à l'aide de la calculatrice. On obtient la réponse en utilisant le fait que la suite est strictement croissante.
Mais cette méthode ne permet pas de réponde à la deuxième question pour laquelle la réponse est 914. Cela prendrait beaucoup trop de temps.

Le mieux est de résoudre les deux questions par des inéquations (on ne calcule pas les termes successifs).

On sait que $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=n\sqrt{5}-23$.

• On cherche les entiers naturels n tels que $u_n \leqslant 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow n\sqrt{5}-23 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow n\sqrt{5} \leqslant 23$

$\Leftrightarrow n \leqslant \dfrac{23}{\sqrt{5}}$

Avec la calculatrice, on trouve $\dfrac{23}{\sqrt{5}}=10,285912...$.

Les entiers naturels vérifiant (1) sont tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à 10.

Les termes de la suite qui sont négatifs ou nuls sont u_0, u_1, …, u_{10}. Il y en a donc 11.

• On cherche les entiers naturels n tels que $u_n \leqslant 2020 \quad (2)$.

$(2) \Leftrightarrow n\sqrt{5}-23 \leqslant 2020$

$\Leftrightarrow n\sqrt{5} \leqslant 2043$

$\Leftrightarrow n \leqslant \dfrac{2043}{\sqrt{5}}$

Avec la calculatrice, on trouve $\dfrac{2043}{\sqrt{5}}=913,65...$.

Les entiers naturels vérifiant (2) sont tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à 913.

Les termes de la suite qui sont inférieurs ou égaux à 2020 sont u_0, u_1, …, u_{913}. Il y en a donc 914.

III.

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + n^2(n-4) - n(n-2)^2$ pour tout entier naturel *n*.
Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

Pour avoir une idée de la réponse, on peut rentrer la suite (u_n) dans la calculatrice ou calculer les premiers termes à la main.

On obtient : $u_0 = 1$, $u_1 = -3$, $u_2 = -7$ etc. ce qui laisse penser que la suite (u_n) est arithmétique de raison – 4.

Pour le démontrer, il faut faire un calcul pour n entier naturel quelconque.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 + n^3 - 4n^2 - n(n^2 - 4n + 4)$$

$$= 1 + \cancel{n^3} - \cancel{4n^2} - \cancel{n^3} - \cancel{4n^2} - 4n$$

$$= 1 - 4n$$

On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = -4$.

La justification vient du calcul.

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0 = 4$ et la relation de récurrence $2v_{n+1} = 2v_n - 1$ pour tout entier naturel *n*.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.

On peut commencer par calculer les premiers termes de la suite.

$2v_1 = 2v_0 - 1 = 2 \times 4 - 1 = 7$ donc $v_1 = \frac{7}{2}$

$2v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times \frac{7}{2} - 1 = 6$ donc $v_2 = 3$

$2v_3 = 2v_2 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$ donc $v_3 = \frac{5}{2}$

D'après ces calculs, on peut conjecturer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

On passe ensuite au calcul littéral pour démontrer le résultat.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{2v_n - 1}{2}$$

$$= v_n - \frac{1}{2}$$

On en déduit que la suite (v_n) est arithmétique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $r' = -\frac{1}{2}$.

IV.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $\frac{1}{4}$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{2020}$ grâce à la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Vérifier le résultat en utilisant la commande de la calculatrice permettant de calculer une somme.

On applique la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

On aura besoin du calcul de $u_{2020} = u_0 + 2000 \times \frac{1}{4} = -3 + 2020 \times \frac{1}{4} = 502$.

$$S = 2021 \times \frac{u_0 + u_{2020}}{2}$$

$$S = 2021 \times \frac{-3 + 502}{2}$$

$$S = 504239{,}5$$

Pour utiliser la commande de la calculatrice permettant de calculer une somme, on écrit commence par détermine l'expression du terme général de la suite.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n}{4} - 3$$

On peut donc écrire $S = \sum_{k=0}^{k=2020} \left(\frac{k}{4} - 3\right)$.

Pour la calculatrice, on écrit $\sum_{\mathrm{K}=0}^{2020} \left(\frac{\mathrm{K}}{4} - 3\right)$ (K est une variable muette, elle doit bien être la même dans l'expression et sous le symbole Σ).

On retrouve la valeur obtenue par le calcul.

V.

$S = 8 + ... + 212$ est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique. On sait que $S = 5720$.

1°) Calculer le nombre de termes de la somme *S*.

Soit *x* le nombre de termes de la somme.

On applique la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique afin d'exprimer *S* en fonction de *x*.

$S=\dfrac{x(8+212)}{2}$

$=\dfrac{x\times 220}{2}$

$=110x$

L'information $S=5720$ permet d'écrire $110x=5720$ ce qui donne immédiatement $x=52$.

La somme comporte 52 termes.

2°) Quelle est la raison de la suite ?

On note u_0, u_1, …, u_{51} les termes de la suite.

On a $u_0=8$ et $u_{51}=212$.

On note r la raison de la suite.

On a $u_{51}=u_0+51r$.
Ainsi $212=8+51r$.
On en déduit $204=51r$ ce qui donne $r=\dfrac{1}{4}$.

La raison de la suite est donc $r=\dfrac{1}{4}$.

VI.

Dans cet exercice, le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\,(m-1\,;-1)$ et $\vec{v}\,(2\,;2m+1)$ où m est un réel.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=x_{\vec{u}}\times x_{\vec{v}}+y_{\vec{u}}\times y_{\vec{v}}$

$=(m-1)\times 2+(-1)\times(2m+1)$

$=2m-2-2m-1$

$=-3$

On constate que le résultat ne dépend pas de *m*.

2°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2+x-2y-1=0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M}\in\mathcal{C} \Leftrightarrow x^2+y^2+x-2y-1=0$

$\Leftrightarrow x^2+x+y^2-2y-1=0$ (on met sous forme canonique les trinômes x^2+x et y^2-2y)

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+(y-1)^2-1-1=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

Rappel : La forme canonique d'un polynôme du second degré ax^2+bx+c avec $a\neq 0$ est $a(x-\alpha)^2+\beta$.

Pour mettre le polynôme x^2+x sous forme canonique, on écrit
$x^2+x=x^2+2\times x\times\dfrac{1}{2}=\left(x^2+2\times x\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{1}{4}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$.

La dernière égalité obtenue permet d'affirmer que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{2}$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite D d'équation $y=2x$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation $x^2+(2x)^2+x-2\times 2x-1=0$ $\quad(1)$.

$(1) \Leftrightarrow x^2+4x^2+x-4x-1=0$

$\Leftrightarrow 5x^2-3x-1=0$

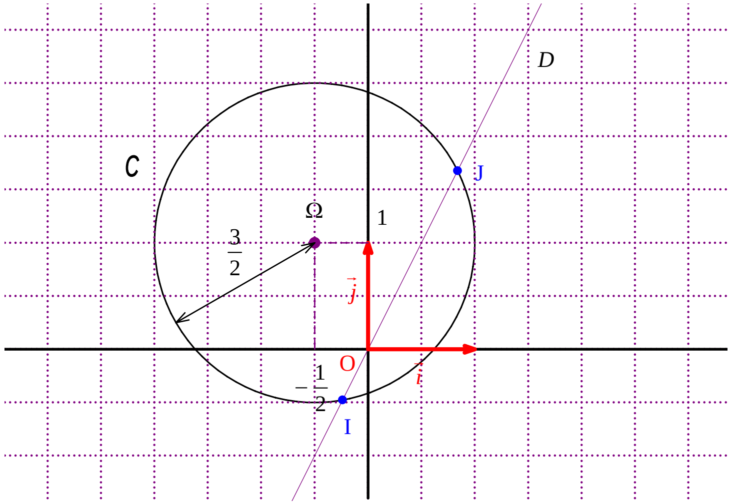
Considérons le polynôme $5x^2-3x-1$.
C'est un polynôme du second degré.

$\Delta=(-3)^2-4\times5\times(-1)$

$=29$

$\Delta>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2 : $x_1=\dfrac{3-\sqrt{29}}{10}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{29}}{10}$

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont $\dfrac{3-\sqrt{29}}{10}$ et $\dfrac{3+\sqrt{29}}{10}$.



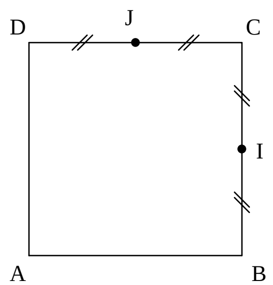
On calcule aisément les ordonnées des points d'intersection en utilisant l'équation de *D*.

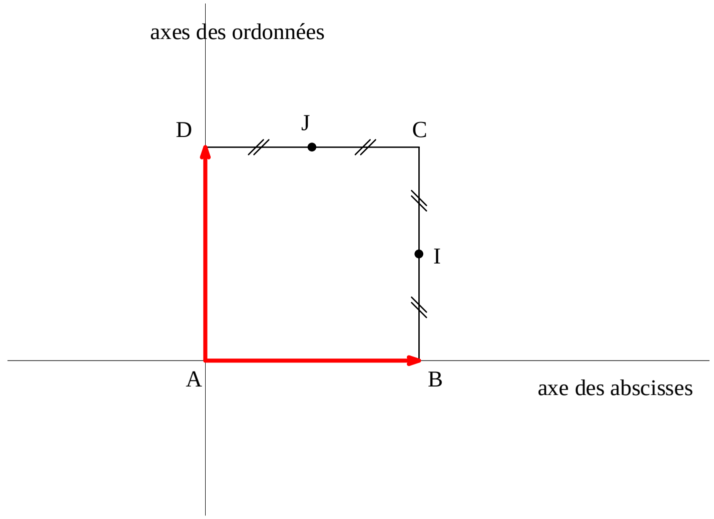
VII.

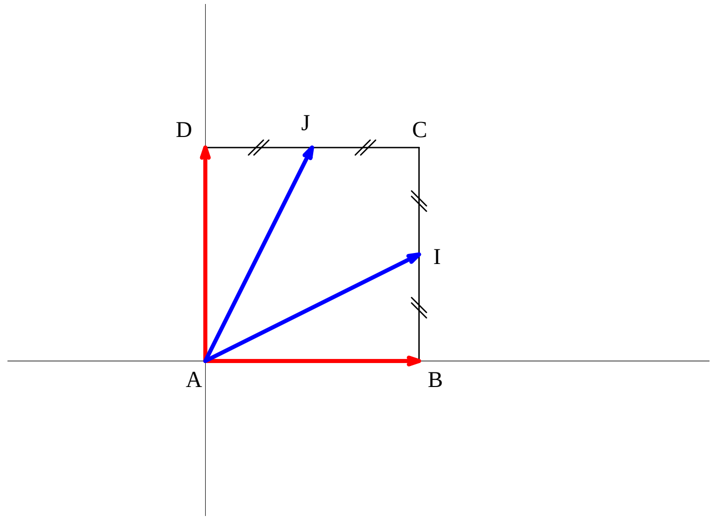
Soit ABCD un carré du plan *P* dont les côtés ont pour longueur 1. On note I et J les milieux respectifs de $[\mathrm{BC}]$ et $[\mathrm{CD}]$.

On munit le plan du repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.

Donner sans justifier les coordonnées de tous les points la figure le repère $\mathcal{R}$.







$\mathrm{A}\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ $\quad \mathrm{B}\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ $\quad \mathrm{C}\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$ $\quad \mathrm{D}\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ $\quad \mathrm{I}\left|\begin{matrix}1\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ $\quad \mathrm{J}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\right.$

En utilisant les coordonnées, calculer au choix l'un des deux produits scalaires suivants : $p = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AJ}}$; $p' = \overrightarrow{\mathrm{DI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BJ}}$.

Calcul de p :

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{I}}-x_{\mathrm{A}}=1 \\ y_{\mathrm{I}}-y_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{\mathrm{AJ}}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{J}}-x_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2} \\ y_{\mathrm{J}}-y_{\mathrm{A}}=1 \end{array}\right.$$

$$p=x_{\overrightarrow{\mathrm{AI}}}\times x_{\overrightarrow{\mathrm{AJ}}}+y_{\overrightarrow{\mathrm{AI}}}\times y_{\overrightarrow{\mathrm{AJ}}}$$

$$=1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=1$$

Calcul de p' :

$$\overrightarrow{\mathrm{DI}}\left|\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{\mathrm{DJ}}\left|\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{array}\right.$$

$$p'=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=-1$$