$1^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Devoir pour le vendredi 12 juin 2020

I. On donne $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Vérifier cette valeur grâce à la calculatrice formelle du site « dcode » (https://www.dcode.fr/calculatrice-formelle).

1°) Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{2\pi}{5}$.
Vérifier cette valeur grâce à la calculatrice formelle du site « dcode ».

2°) En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10}$.
Vérifier ces valeurs grâce à la calculatrice formelle du site « dcode ».

3°) Cette question est indépendante des précédentes.

Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{4\pi}{5}$.
Vérifier cette valeur grâce à la calculatrice formelle du site « dcode ».

II. Soit x le réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ tel que $\sin x=0,6$.

1°) Calculer $\cos x$ et $\tan x$.

2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de x.

III. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=3$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=7-4(u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer la valeur exacte de u_4.
On demande bien la valeur exacte et non une valeur approchée.
On utilisera une calculatrice en ligne ou éventuellement la console Python pour effectuer les calculs qui dépassent les capacités de la calculatrice.

2°) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On recopiera directement les phrases suivantes en la complétant sans justifier :

- On peut conjecturer que la suite (u_n) est … .

- On peut conjecturer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à … .

IV. L'objectif de cet exercice est d'étudier une nouvelle courbe du plan.

Soit A et B deux points du plan *P* tels que $\mathrm{AB} = 2$.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M de *P* tels que $\mathrm{AM} \times \mathrm{BM} = 1$.

1°) Démontrer que le milieu O de $[\mathrm{AB}]$ appartient à $\mathscr{C}$.

On munit le plan *P* est d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où $\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$.
Dans ce repère, les points A et B ont pour coordonnées respectives $(1\,;0)$ et $(-1\,;0)$.
Dans toute la suite de l'exercice, on travaille dans ce repère.

2°) Le but de cette question est de déterminer une équation de la courbe $\mathscr{C}$.
On utilise une méthode analogue à celle utilisée pour la détermination d'une équation de cercle.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.
Exprimer les distances AM et BM en fonction de x et y.
En déduire une équation de $\mathscr{C}$. Il y a plusieurs réponses possibles.
On rédigera de la manière suivante : « Une équation de $\mathscr{C}$ est … ».

Commentaires :

• On obtient une belle équation de la forme $f(x, y) = k$, un peu plus compliquée que celles des courbes habituelles !

• On ne cherchera pas exprimer y en fonction de x ni x en fonction de y (il serait vain d'essayer d'isoler x ou y dans l'un des membres).
On ne peut que conserver une équation sous forme implicite.

• On ne demande pas de donner une équation sous forme simplifiée (ce qui d'ailleurs n'est pas possible).

3°) Tracer $\mathscr{C}$ sur Geogebra en utilisant l'équation obtenue au 1°).
On obtient une courbe célèbre, différente de toutes celle connues.

Faire une capture d'écran à insérer dans la copie.

On pourra utiliser Geogebra en ligne.
Faire en sorte que la courbe $\mathscr{C}$ soit assez grande.

On pourra placer quelques points sur la courbe $\mathscr{C}$ puis obtenir les tangentes en ces points à l'aide de la commande de tracé d'une tangente de Geogebra (attention cependant, pour tracer les tangentes, l'équation rentrée dans Geogebra ne doit pas comporter de racines carrées).
On pourra même éventuellement placer un point mobile sur la courbe et tracer la tangente la tangente en ce point puis faire varier le point sur la courbe.

4°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses par le calcul.

5°) On note *D* la droite d'équation $x + y = 1$.

a) Tracer *D* sur le même graphique Geogebra que précédemment. *D* coupe $\mathscr{C}$ en deux points I et J.
À l'aide de la commande permettant de faire apparaître les points d'intersection entre deux courbes, marquer I et J sur le graphique.

Lire et écrire sur la copie les valeurs approchées des abscisses de I et J qui apparaissent dans la fenêtre de gauche.

La commande Geogebra donne les coordonnées des points d'intersection mais uniquement des valeurs approchées.

b) Écrire un système de deux équations dont les couples solutions sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.
Ce système est beaucoup trop compliqué pour être résolu « à la main ».
Utiliser le site « dcode » (partie « résolution des équations » en écrivant une équation sur chaque ligne) pour résoudre le système.
Lire les expressions exactes des abscisses de I et J. Il n'est pas demandé de les recopier sur la copie.

Informations complémentaires :

• Il est possible de construire la courbe $\mathscr{C}$ point par point en utilisant uniquement une règle non graduée et un compas. La construction n'est cependant pas très simple.

• La courbe $\mathscr{C}$ peut être étudiée par d'autres moyens que l'on voit dans le supérieur (équations paramétriques, équation polaire).

• La courbe $\mathscr{C}$ possède de nombreuses propriétés : longueur totale, aire d'une boucle… Ces problèmes ont été étudiés par plusieurs mathématiciens.
Le problème de la longueur des arcs de la lemniscate (problème de quadrature) a notamment été traité par Giulio Fagnano en 1750.

Cette courbe s'appelle une lemniscate de Bernoulli car elle a été étudiée par le grand mathématicien et physicien suisse Jacques Bernoulli (1654-1705).
La lemniscate de Bernoulli fait partie d'une famille de courbes décrite par Jean-Dominique Cassini en 1680, les ovales de Cassini. Jacques Bernoulli la redécouvre en 1694 au détour de travaux sur l'ellipse, et la baptise *lemniscus* (« ruban » en latin).

Jean-Dominique Cassini, originaire du Duché de Savoie, est arrivé en France à l'époque de Louis XIV. Il a participé à la création de l'Observatoire de Paris.
Il est à l'origine d'une lignée d'astronomes et de cartographes célèbres qui ont œuvré durant la seconde moitié du XVII^{e} siècle et tout le XVIII^{e} siècle.
Leur grand œuvre est la cartographie complète de la France achevée à la toute fin du XVIII^{e} siècle, sous Louis XVI, dans des conditions difficiles par manque d'argent. Il s'agit des cartes dites « de Cassini » d'une très grande précision.
Pour mener à bien ce travail, la méthode utilisée était la triangulation et il reste dans divers endroits de France des traces du passage des Cassini (comme à Juvisy, dans les environs de Paris, ou au Revest, dans les environs de Marseille où l'on peut encore observer de petites pyramides de pierres).

V. Soit ABC un triangle équilatéral de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$). On note O son centre de gravité.
Faire une figure assez grande.

Calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$. On donnera le résultat en fonction de a sous la forme la plus simple possible.

Corrigé du devoir pour le 12-6-2020

I.

1°) D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2\frac{2\pi}{5}+\sin^2\frac{2\pi}{5}=1$.

D'où $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\sin^2\frac{2\pi}{5}=1$ soit $\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}+\sin^2\frac{2\pi}{5}=1$, ce qui donne $\frac{6-2\sqrt{5}}{16}+\sin^2\frac{2\pi}{5}=1$.

$$\sin^2\frac{2\pi}{5}=1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}$$

$$\sin^2\frac{2\pi}{5}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

Or $\frac{2\pi}{5}\in[0\,;\pi]$. Donc $\sin\frac{2\pi}{5}\geqslant 0$.

D'où $\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

2°) Il faut faire le lien avec la question 1°) et utiliser les formules de trigonométrie.

• On a $\frac{3\pi}{5}=\pi-\frac{2\pi}{5}$ donc

$$\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

• On a $\frac{7\pi}{5}=\pi+\frac{2\pi}{5}$ donc

$$\cos\frac{7\pi}{5}=\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{5}=\sin\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)=-\sin\frac{2\pi}{5}=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

• On a $\frac{\pi}{10}=\frac{5\pi-4\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}$ donc

$$\cos\frac{\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

3°) On utilise la valeur du cosinus de $\frac{2\pi}{5}$.

$$\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1 \quad \text{(formule de duplication)}$$

$$=2\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-1$$

$$=\frac{3-\sqrt{5}}{4}-1$$

$$=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

On vérifie cette valeur grâce à la calculatrice formelle du site « dcode ».

II.

1°) D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.
D'où $\cos^2 x+0,6^2=1$ ce qui donne $\cos^2 x=1-0,36=0,64$.

Or $x\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ par hypothèse donc $\cos x\leqslant 0$.

D'où $\cos x=-0,8$.

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{0,6}{0,8}=-\frac{3}{4}=-0,75.$$

2°) On utilise le cosinus ou le sinus.

Il est préférable d'utiliser le cosinus.

La calculatrice est mise en mode radian.

$\cos^{-1}(-0.8$
On obtient l'affichage 2.498091545.

On a $x=2,49809154...$.
La valeur arrondie au millième de x est 2,498.

III.

1°) Calculons la valeur de u_4.

$u_1 = 7 - 4(u_0)^2 = 7 - 4 \times 3^2 = -29$

$u_2 = 7 - 4(u_1)^2 = 7 - 4 \times (-29)^2 = -3357$

$u_3 = 7 - 4\ (u_2)^2 = 7 - 4 \times (-3357)^2 = -45077789$

$u_4 = 7 - 4(u_3)^2 = 7 - 4 \times (-45077789)^2 = -8128028244514077$ (calcul effectué avec un outil de calcul plus performant que la calculatrice.

On ne peut pas trouver l'expression du terme général de u_n en fonction de *n*.

On peut faire un programme Python :

```
u=3
for i in range(4):
      u=7-4*u**2
print(u)
```

2°) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et la limite de u_n lorsque *n* tend vers + ∞.

On recopiera directement les phrases suivantes en la complétant sans justifier :

- On peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

- On peut conjecturer la limite de u_n lorsque *n* tend vers + ∞ est égale à – ∞.

- La suite (u_n) n'est pas géométrique. On ne peut appliquer aucun résultat. On se contente d'une conjecture.

- Avec un peu d'intuition, on peut formuler deux conjectures qui semblent plausibles.

- Ces conjectures pourront être justifiées en Terminale.

IV.

Dans cet exercice, on s'intéresse au lieu géométrique des points dont le produit des distances à A et B est égal à 1.

1°) On a $\text{AB}=2$ par hypothèse donc $\text{OA}=\text{OB}=1$.
On a $\text{OA}\times\text{OB}=1\times1=1$.
On en déduit que $\text{O}\in\mathscr{C}$.

2°) On commence par calculer AM et BM en fonction de *x* et *y*.

$$\text{AM}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\text{BM}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

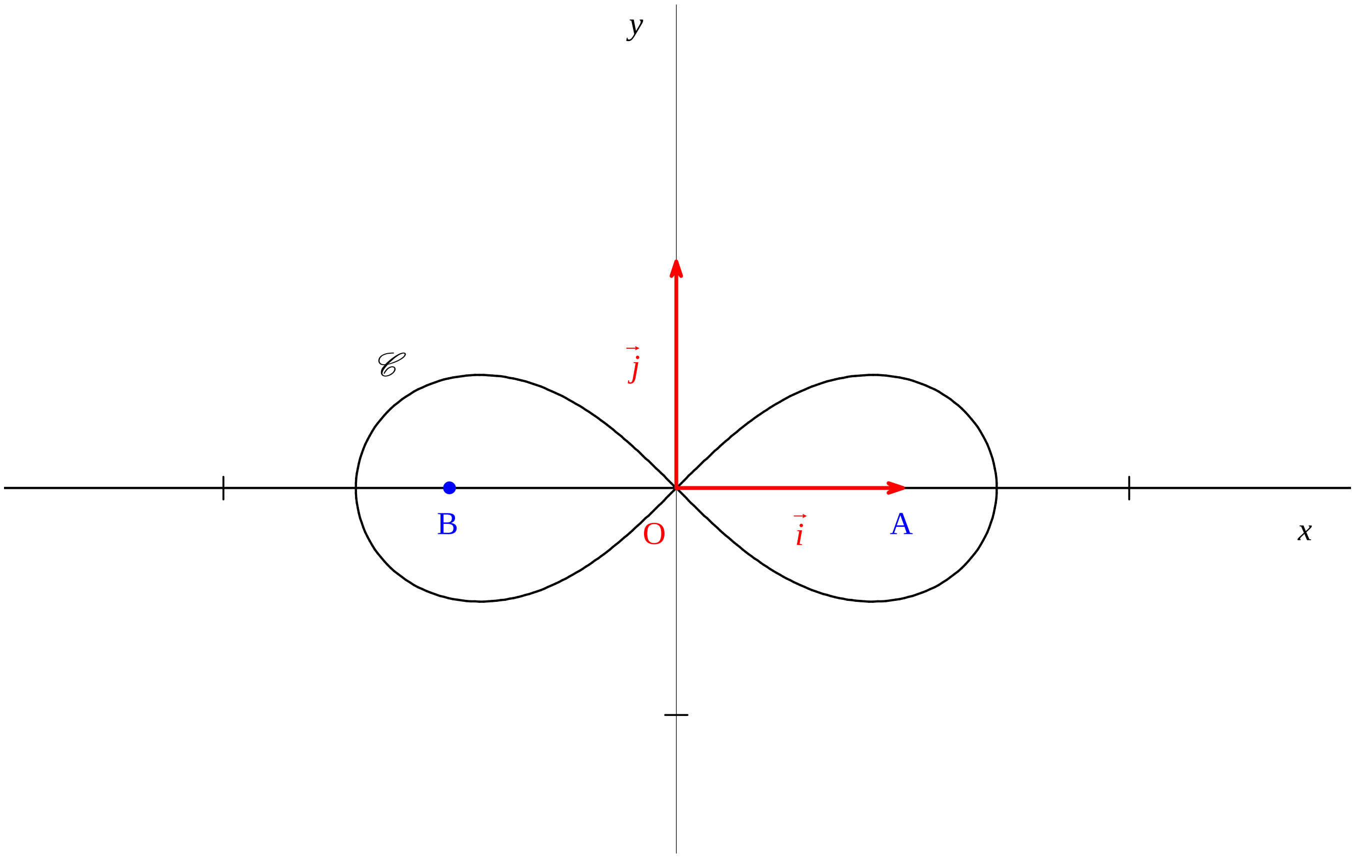
Il n'y a pas à transformer ces expressions. On peut les laisser telles quelles sans développer les carrés.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$$\begin{aligned}\text{M}\in\mathscr{C} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}\times\sqrt{(x+1)^2+y^2}=1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left[(x-1)^2+y^2\right]\left[(x+1)^2+y^2\right]}=1\\ &\Leftrightarrow \left[(x-1)^2+y^2\right]\left[(x+1)^2+y^2\right]=1\end{aligned}$$

La courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $\sqrt{(x-1)^2+y^2}\times\sqrt{(x+1)^2+y^2}=1$ ou $\left[(x-1)^2+y^2\right]\left[(x+1)^2+y^2\right]=1$.

3°)



On tape sur Geogebra l'équation.
La courbe sera désignée par eq1.

On fait apparaître une courbe qui a la forme du symbole infini.

On peut conjecturer que $\mathscr{C}$ admet les axes du repère comme axes de symétries et l'origine O du repère comme centre de symétrie. Cela se vérifie aisément grâce à l'équation.

En créant un point sur la courbe, on fait apparaître un point nommé A.

Dans la barre d'algèbre, on utilise la commande Tangente(A,eq1).

Geogebra n'arrive pas si l'on garde les racines carrées.

4°) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe $(\mathrm{O}x)$ sont les solutions de l'équation $\left[(x-1)^2+0^2\right]\left[(x+1)^2+0^2\right]=1 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-1)(x+1)\right]^2=1$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=1 \text{ ou } x^2-1=-1$$

$$\Leftrightarrow x^2=2 \text{ ou } x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2} \text{ ou } x=0$$

Les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe $(\mathrm{O}x)$ sont les points d'abscisses $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 0.

On vérifie sur le graphique.

5°) a) Pour les abscisses de I et J, on lit 0,56 et 1,3 dans la fenêtre algèbre.

b)

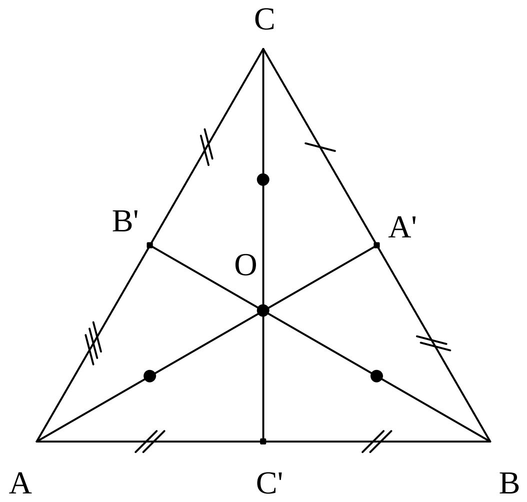
Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D sont les couples de solutions du système $\begin{cases}\left[(x-1)^2+y^2\right]\left[(x+1)^2+y^2\right]=1\\ x+y=1\end{cases}$ (sur la première ligne, on met l'équation de la courbe $\mathscr{C}$; sur la deuxième ligne on met l'équation de la droite D donnée dans l'énoncé).

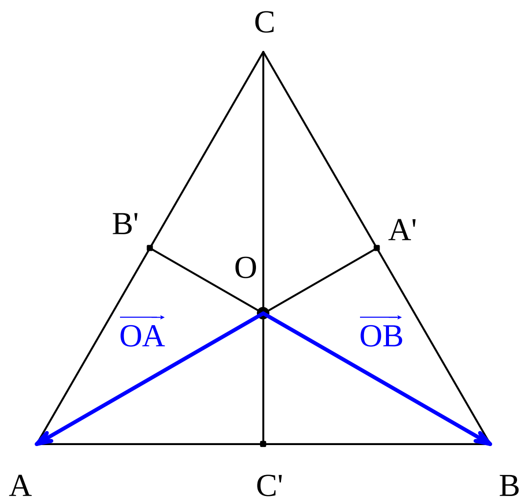
Ce système ne se résout pas facilement « à la main » donc on utilise un outil de résolution tel que « dcode » (rubrique résolution d'équations).

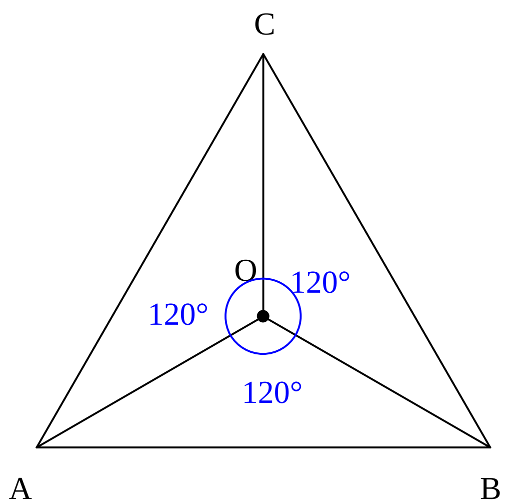
On lit les valeurs exactes des abscisses à l'aide de radicaux (racines carrées et racines cubiques).
Les expressions sont assez énormes.

V.

Par définition du centre de gravité d'un triangle, on sait que O est le point de concours des médianes.
On trace donc les médianes.







On sait que, dans un triangle équilatéral les médianes, sont aussi les hauteurs.

On peut utiliser la propriété donnant la longueur des hauteurs dans un triangle équilatéral : $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

On sait par propriété que O est situé sur chaque médiane aux deux tiers à partir du sommet.

Donc $\text{OA} = \text{OB} = \text{OC} = \dfrac{\cancel{2}}{3} \times \dfrac{a\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$$\overrightarrow{\text{OA}} \bullet \overrightarrow{\text{OB}} = \text{OA} \times \text{OB} \times \cos \widehat{\text{AOB}}$$

On sait que $\widehat{\text{AOB}} = 120°$ (voir figure : les droites (OA), (OB), (OC) sont des axes de symétrie du triangle ; on vérifie en effectuant la mesure au rapporteur).

$$\overrightarrow{\text{OA}} \bullet \overrightarrow{\text{OB}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \times \frac{a}{\sqrt{3}} \times \cos 120°$$

$$= \frac{a^2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{a^2}{6}$$

Autre méthode :

On applique l'une des formules de la médiane du cours, $\overrightarrow{\text{OA}} \bullet \overrightarrow{\text{OB}} = \text{OC}'^2 - \dfrac{\text{AB}^2}{4}$.