TS2 Contrôle N°5 (3 heures) du jeudi 29 mars 2007

Consignes à respecter scrupuleusement

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Il est demandé de soigner particulièrement l'orthographe, la présentation et la rédaction ; on n'oubliera pas en particulier d'encadrer tous les résultats en rouge à la règle.

L'en-tête de la copie doit être correctement libellé : nom, prénom, classe, date, intitulé exact sans abréviations ainsi qu'un cartouche de présentation avec le numéro des exercices.
À la fin de l'épreuve, il est demandé de ne pas joindre l'énoncé dans la copie mais de le garder.

I. (5 points) Q.C.M.

Pour chaque question, il y a une seule réponse valable.
Chaque réponse juste rapporte 0,5 point ; chaque réponse fausse enlève à 0,5 point. Une absence de réponse n'enlève aucun point ni n'ajoute aucun point. Aucune justification n'est demandée.

$\boxed{1}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{3}+1}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par

A : $F(x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{x}{3}+1}$ B : $F(x)=3\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}-1\right)$ C : $F(x)=3\mathrm{e}^{\frac{x}{3}+1}$

$\boxed{2}$ L'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ est la fonction F définie par

A : $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ B : $F(x)=\mathrm{e}^{-x^2}-\frac{1}{\mathrm{e}}$ C : $F(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

$\boxed{3}$ L'intégrale $\int_0^x t\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ est égale à

A : $x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-1$ B : $x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1$ C : $x\mathrm{e}^x$

$\boxed{4}$ Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\ ;\ 1]$ telle que pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, on ait $f(x)\leqslant x^2$.

A : $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x\geqslant 0$ B : $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x\leqslant 0$ C : $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{3}$

$\boxed{5}$ Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels quelconques dans I.
Laquelle de ces expressions est égale à $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x-\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x$?

A : $f(b)-f(c)$ B : $\int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x$ C : $-\int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x$

$\boxed{6}$ On pose $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\ \mathrm{d}x$ et $J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\ \mathrm{d}x$.

Le nombre $I-J$ est égal à

A : $\ln\frac{2}{3}$ B : $\ln\frac{3}{2}$ C : $\frac{3}{2}$

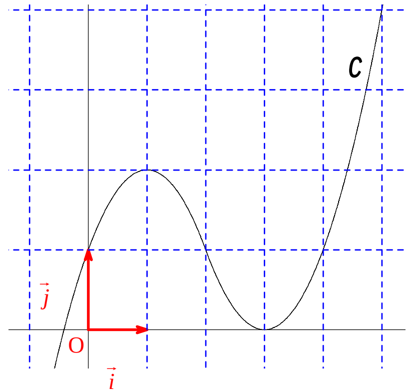
$\boxed{7}$ On considère la fonction définie par $f(x)=x^2-1$. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-1\,;1]$ est égale à

A : 0 B : $-\frac{2}{3}$ C : $\frac{2}{3}$

$\boxed{8}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par

A : $F(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)$ B : $F(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)$ C : $F(x)=-\ln\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)$

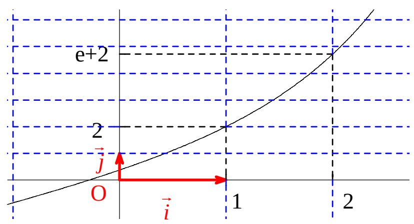
$\boxed{9}$ On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On pose $I=\int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x$. On précise que $\mathcal{C}$ admet le point de coordonnées $(2\,;1)$ pour centre de symétrie.



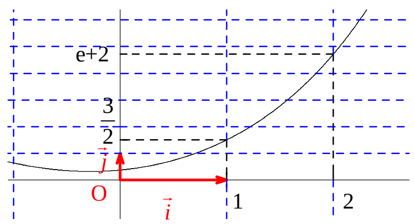
D'après le graphique, quel est l'encadrement correct parmi les propositions suivantes ?

A : $2\leqslant I\leqslant 3$ B : $3\leqslant I\leqslant 4$ C : $4\leqslant I\leqslant 5$

$\boxed{10}$ Le graphique 1 donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et le graphique 2 celle d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ dans un repère orthogonal.



Graphique 1



Graphique 2

L'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ est égale à :

A : $\mathrm{e}+\frac{3}{4}$ B : $\mathrm{e}+\frac{1}{2}$ C : 1

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Note sur 5
Réponse											

Dans les exercices **II** et **III**, le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Aucun graphique n'est demandé dans ces deux exercices.

II. (5 points)

À tout point M de *P*, d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

On note A le point d'affixe 1.
On n'utilisera pas l'écriture algébrique des nombres complexes dans cet exercice.

1°) Déterminer l'ensemble *E* des points M de *P* tels que l'on ait $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$.
2°) Démontrer que $\mathrm{OM} \times \mathrm{OM}' = 1$. En déduire que, si M appartient à un cercle fixe Γ de centre O et de rayon *r* $\left(r > 0\right)$, alors M' appartient aussi à un cercle Γ' de centre O et de rayon r' que l'on exprimera en fonction de *r*.
3°) On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

a) Démontrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 0$, on a : $|z-1| = \dfrac{|z'-1|}{|z'|}$.

b) Démontrer que, si M est un point quelconque de $\mathcal{C}$, distinct de O, alors son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira.

III. (5 points)

On note *f* l'application de *P* dans lui-même qui, à tout point M de *P*, d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $z' = 1 + z^2$.

On note A le point d'affixe 1 et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1°) a) Démontrer que *f* admet deux points invariants U et V.
On rédigera ainsi la recherche : « M est invariant par *f* si et seulement si $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$ ».
b) Vérifier que U et V appartiennent à $\mathcal{C}$.
2°) Soit M_1 et M_2 deux points quelconques de *P*.
Démontrer que $\mathrm{M}_1' = \mathrm{M}_2'$ si, et seulement si, ($\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2$) ou ($\mathrm{M}_1$ et M_2 sont symétriques par rapport au point O).
3°) Démontrer que tous les points M de $\mathcal{C}$ ont leur image M' sur un même cercle que l'on définira.

IV. (5 points)

Dans un jeu, on dispose d'une roue circulaire divisée en six secteurs de même angle. Trois secteurs sont de couleur rouge, un est de couleur blanche et deux sont de couleur noire. Un jeu consiste à lancer la roue une fois.
La roue s'arrête sur l'un des secteurs, les six secteurs étant équiprobables.
La règle est la suivante : le joueur mise 10 euros.
Si la roue s'arrête sur un secteur rouge, il ne reçoit rien.
Si la roue s'arrête sur le secteur blanc, il reçoit 10 euros.
Si la roue s'arrête sur un secteur noir, il reçoit *m* euros $\left(m > 10\right)$.
On appelle gain algébrique du joueur, la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue d'une partie et sa mise.
On désigne par X la variable aléatoire associant à chaque lancer ce gain algébrique.
On répondra aux différentes questions directement dans le tableau suivant.

Déterminer l'espérance de X en fonction de *m*.	
Déterminer pour quelle valeur de *m* le jeu est équitable.	
Le joueur lance la roue trois fois de suite. Déterminer la probabilité que la roue s'arrête sur chaque fois sur un secteur de couleur différente, sans tenir compte de l'ordre.	
Le joueur effectue quatre lancers consécutifs indépendants. Déterminer la probabilité pour que ce joueur obtienne exactement deux fois un gain algébrique strictement positif au cours des quatre lancers.	
Le joueur effectue *n* lancers consécutifs indépendants $\left(n \geqslant 2\right)$. On note p_n la probabilité pour que ce joueur obtienne au moins une fois un gain algébrique strictement positif au cours des *n* lancers. Déterminer le plus petit entier *n* tel que $p_n \geqslant 0{,}999$.	

Corrigé du contrôle du 29-3-2007

I.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Faire une intégration par parties

$\boxed{\mathbf{9}}$ Il y a entre 3 et 4 carreaux.

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse	C	C	B	C	C	A	B	C	B	B

III.

1°) On résout l'équation $z' = z$.