T experts

Devoir pour le mercredi 20 janvier 2021

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ ainsi que les relations de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 3u_n + 2v_n$ pour tout entier naturel *n*.

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels.

1°) Rentrer les suites sur la calculatrice ou réaliser un programme en Python.
Que peut-on conjecturer pour le chiffre des unités de u_n et de v_n suivant les valeurs de *n* ?

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Le but de l'exercice est de démontrer que la conjecture est vraie.

2°) Déterminer la matrice carrée A d'ordre 2 telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel *n*.

On écrira la matrice sans rédaction et sans justification.

> En calculant la matrice A^n pour *n* entier naturel quelconque (par exemple à l'aide du site « dcode »), on pourrait en déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de *n* mais ces expressions ne permettent pas de résoudre le problème.

3°) On note I la matrice identité d'ordre 2.
Justifier que $\mathrm{A}^6 \equiv \mathrm{I}$ (mod. 10).
Achever la démonstration.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du devoir pour le 20-1-2021

1°)

```python
def termes(n):
    u=0
    v=1
    for i in range(n+1):
        u,v=2*u+v,3*u+2*v
        print (u, v)
```

termes(10)
1 2
4 7
15 26
56 97
209 362
780 1351
2911 5042
10864 18817
40545 70226
151316 262087
564719 978122

Il est possible de calculer les termes à la main.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	0	1	4	15	56	209	780	2911	10864	40545	151316	564719	2107560
v_n	1	2	7	26	97	362	1351	5042	18817	70226	262087	978122	3650401

On observe une périodicité d'ordre 6 dans le chiffre des unités de u_n.

On conjecture que :
- si n est de la forme $6k$ $(k \in \mathbb{N})$ le chiffre des unités de u_n est égal à 0 et le chiffre des unités de v_n est égal à 1.
- si n est de la forme $6k+1$ $(k \in \mathbb{N})$, le chiffre des unités de u_n est égal à 1 et le chiffre des unités de v_n est égal à 2.
- si n est de la forme $6k+2$ $(k \in \mathbb{N})$, le chiffre des unités de u_n est égal à 4 et le chiffre des unités de v_n est égal à 7 ;
- si n est de la forme $6k+3$ $(k \in \mathbb{N})$, le chiffre des unités de u_n est égal à 5 et le chiffre des unités de v_n est égal à 6 ;
- si n est de la forme $6k+4$ $(k \in \mathbb{N})$, le chiffre des unités de u_n est égal à 6 et le chiffre des unités de v_n est égal à 7 ;
- si n est de la forme $6k+5$ $(k \in \mathbb{N})$, le chiffre des unités de u_n est égal à 9 et le chiffre des unités de v_n est égal à 2.

2°)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3°) On a $A^6 = \begin{pmatrix} 1351 & 780 \\ 2340 & 1351 \end{pmatrix}$.

Or tout entier naturel est congru à son chiffre des unités modulo 10 donc $1351 \equiv 1$ (mod. 10), $780 \equiv 0$ (mod. 10) et $2340 \equiv 0$ (mod. 10).

On en déduit que $A^6 \equiv I$ (mod. 10).

Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le chiffre des unités de u_n et b_n le chiffre des unités de v_n et on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \equiv a_n$ (mod. 10) et $v_n \equiv b_n$ (mod. 10) donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n \equiv Y_n$ (mod. 10).

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_{n+1} = AX_n$ donc d'après une propriété du cours, $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_{n+6} = A^6 X_n$.

Comme $A^6 \equiv I$ (mod. 10), $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_{n+6} \equiv X_n$ (mod. 10) (propriété pour congruences de matrices).

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+6} \equiv u_n$ (mod. 10) et $v_{n+6} \equiv v_n$ (mod. 10).

On en déduit que u_{n+6} a le même chiffre des unités que u_n et v_{n+6} a le même chiffre des unités que v_n

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+6} = a_n$ et $b_{n+6} = b_n$.

Les suites (a_n) et (b_n) sont périodiques de période 6.

Le résultat conjecturé à la question 1°) est donc démontré.