TS1 spécialité

Devoir pour le lundi 4 mai 2020

I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{Z}$ par $f(n)=\dfrac{n}{3}$ si n est divisible par 3 et $f(n)=3-n$ si n n'est pas divisible par 3.

On notera que f est une fonction définie par deux expressions différentes selon que n est divisible par 3 et l'on observera que f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Le but du devoir est de déterminer l'ensemble E des entiers relatifs n vérifiant la condition $f(n)\equiv 1 \pmod{5}$.

1°) Déterminer tous les entiers naturels de E inférieurs ou égaux à 50.
On pourra éventuellement utiliser un programme Python.

2°) Déterminer tous les éléments de E qui sont divisibles par 3.

3°) L'objectif de cette question est de déterminer tous les éléments de E qui ne sont pas divisibles par 3.

Soit n un entier relatif non divisible par 3. On a alors $n\equiv 1$ (mod. 3) ou $n\equiv 2$ (mod. 3).

a) On se place dans le cas où $n\equiv 1$ (mod. 3).

On a alors l'équivalence $n\in E \Leftrightarrow (\mathrm{I}) \begin{cases} 3-n\equiv 1 \text{ (mod. 5)} \\ n\equiv 1 \text{ (mod. 3)} \end{cases}$.

• Démontrer que $(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} n\equiv 7 \text{ (mod. 5)} \\ n\equiv 7 \text{ (mod. 3)} \end{cases}$ puis achever la démarche (toujours en équivalences) pour déterminer les entiers relatifs n solutions de (I).

• Vérifier la résolution du système (I) en utilisant l'outil de résolution des équations modulaires du site « dcode » et (https://www.dcode.fr/solveur-equation-modulaire).

b) Refaire le même travail dans le cas où $n\equiv 2$ (mod. 3).

4°) Formuler une conclusion claire sur l'ensemble E.

II. Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble E des points M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ tels que la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 1 \\ 2 & \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible.

Corrigé du devoir pour le 4-5-2020

I.

1°) On réalise un programme Python.

Les entiers naturels de E inférieurs ou égaux à 50 sont 2, 3, 7, 17, 18, 22, 32, 33, 37, 47, 48.

2°) On cherche à déterminer tous les éléments de E qui sont divisibles par 3.

Soit n un entier divisible par 3.

$$n \in E \Leftrightarrow f(n) \equiv 1 \ \ (\text{mod. } 5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{3} \equiv 1 \ \ (\text{mod. } 5)$$

$$\Leftrightarrow n \equiv 3 \ \ (\text{mod. } 15)$$

Les éléments de E qui sont divisibles par 3 sont les entiers congrus à 3 modulo 15.

3°)

a) 1[er] cas : $n \equiv 1$ (mod. 3)

On a $n \in E \Leftrightarrow (\text{I}) \begin{cases} 3 - n \equiv 1 \ \ (\text{mod. } 5) \\ n \equiv 1 \ \ (\text{mod. } 3) \end{cases}$.

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 2 \ \ (\text{mod. } 5) \\ n \equiv 1 \ \ (\text{mod. } 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 7 \ \ (\text{mod. } 5) \\ n \equiv 7 \ \ (\text{mod. } 3) \end{cases} \quad \text{car } 7 \equiv 2 \ \ (\text{mod. } 5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \mid n - 7 \\ 3 \mid n - 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3 \times 5 \mid n - 7 \quad \text{car 3 et 5 sont premiers entre eux (propriété du cours)}$$

$$\Leftrightarrow 15 \mid n - 7$$

$$\Leftrightarrow n - 7 \equiv 0 \ \ (\text{mod. } 15)$$

$$\Leftrightarrow n \equiv 7 \ \ (\text{mod. } 15)$$

Les solutions de (I) sont les entiers congrus à 7 modulo 15.

On vérifie le site « dcode » (partie « résolution des équations modulaires ».

b) 2e cas : $n \equiv 2 \pmod{3}$.

On a $n \in E \Leftrightarrow (\mathrm{II}) \begin{cases} 3-n \equiv 1 \ (\text{mod. } 5) \\ n \equiv 2 \ (\text{mod. } 3) \end{cases}$.

$$(\mathrm{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 2 \ (\text{mod. } 5) \\ n \equiv 2 \ (\text{mod. } 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \mid n-2 \\ 3 \mid n-2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3 \times 5 \mid n-2$ car 3 et 5 sont premiers entre eux (propriété du cours)

$$\Leftrightarrow 15 \mid n-2$$

$$\Leftrightarrow n-2 \equiv 0 \ (\text{mod. } 15)$$

$$\Leftrightarrow n \equiv 2 \ (\text{mod. } 15)$$

Les solutions de (II) sont les entiers congrus à 2 modulo 15.

On vérifie le site « dcode » (partie « résolution des équations modulaires ».

4°) *E* est l'ensemble des entiers relatifs congrus à 2, 3 ou 7 modulo 15.

On vérifie la cohérence avec les résultats de la question 1°) obtenus avec le programme Python.

II. Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 1 \\ 2 & \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow \det \mathrm{A} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y - 2 \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+y} = 2$$

$$\Leftrightarrow x + y = \ln 2$$

L'ensemble *E* est la droite d'équation $x + y = \ln 2$.