1$^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 6 mars 2020 (50 minutes)

Numéro : ….. **Prénom et nom : ………………..……………………………..** **Note : ….. / 20**

I. (2 points)

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques du plan *P*.

Démontrer l'équivalence suivante : $(\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{w}) \Leftrightarrow$ (les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont orthogonaux).

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

II. (2 points)

Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan *P*.

On suppose que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD}$.

Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$? Justifier.

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

III. (3 points 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Dans le secteur de production d'une entreprise, le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue.

Des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0, 002 ;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0, 003 ;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0, 04.

On note :

- A l'événement « L'alarme se déclenche » ;
- B l'événement « Une panne se produit ».

Pour les réponses aux questions 1°) et 2°), on donnera les valeurs exactes sous forme décimale.

Pour la réponse à la question 3°), on donne la valeur exacte sous forme fractionnaire.

Traduire les informations de l'énoncé en utilisant les événements A et B.

……………………………………………………..……………………………………………………………………

1°) Calculer la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche.

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

2°) Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

3°) Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………………

IV. (2 points 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Dans une entreprise, certains salariés sont en télétravail.
10 % des salariés sont en télétravail ;
22 % des salariés sont des hommes ;
4 % des salariés sont des hommes en télétravail.
On choisit un salarié au hasard. On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

1°) Quelle est la probabilité que ce soit un homme sachant qu'il est en télétravail ?
2°) Quelle est la probabilité qu'il soit en télétravail sachant que c'est un homme ?

1°) ……….. (une seule réponse sans égalité) 2°) ……….. (une seule réponse sans égalité)

V. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=\dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{2{u_n}^2}{u_n+1}$ pour tout entier naturel n. Sur le graphique donné en annexe, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y=\dfrac{2x^2}{x+1}$.
Effectuer sur ce graphique la construction des cinq premiers termes de la suite (sur l'axe des abscisses).
D'après ce graphique, que peut-on conjecturer pour le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite ?
Répondre par une phrase.

………

………

VI. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1=a$ où a est un réel non nul fixé et la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{u_n}$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 en fonction de a (un résultat par colonne).

…………………………..	…………………………..	…………………………..	…………………………..

Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Que vaut u_{2020} ?

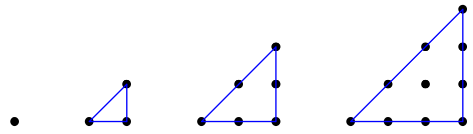
………

………

………

VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Les figures ci-dessous décrivent le procédé de construction des « nombres triangulaires », générant ainsi une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$. Cette suite est connue depuis l'Antiquité par les mathématiciens grecs qui s'y sont intéressés.



1 point 3 points 6 points 10 points

$u_1=1$ $u_2=3$ $u_3=6$ $u_4=10$

1°) Donner la valeur de u_5.

……………….. (une seule égalité)

2°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, n étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$\forall n\in\mathbb{N}$ ………………………………………..

VIII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1}=1-nu_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Donner la valeur de u_1.

……………….. (une seule égalité)

2°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}, n étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ ………………………………………..

IX. (2 points)

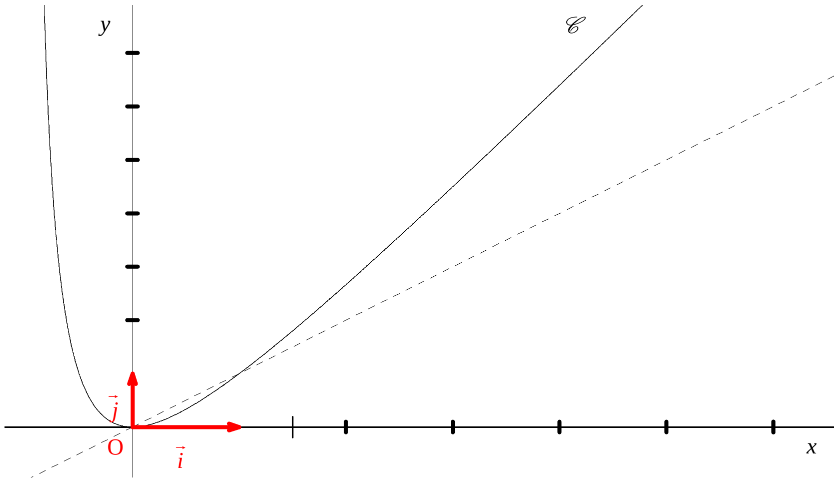
On se place dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Démontrer que la courbe Γ d'équation $x^2+y^2+4x-12y-31=0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon. Donner la réponse ci-dessous en rédigeant la démarche sur la feuille annexe.

………

………

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………..…………………………….

V. Graphique



La droite tracée a pour équation $y = x$.

On effectuera les traits de construction en pointillés.

IX.

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 6-3-2020

I.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques du plan *P*.
Démontrer l'équivalence suivante : ($\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{w}$) $\Leftrightarrow$ (les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont orthogonaux).

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \vec{w} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{u} \bullet \left(\vec{v} - \vec{w}\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont orthogonaux

---

II.

Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan *P*.
On suppose que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD}$.
Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$? Justifier.

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \bullet \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux

---

III.

Dans le secteur de production d'une entreprise, le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue.
Des études ont montré que sur une journée :
• la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0, 002 ;
• la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0, 003 ;
• la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0, 04.
On note :
• A l'événement « L'alarme se déclenche » ;
• B l'événement « Une panne se produit ».

Pour les réponses aux questions 1°) et 2°), on donnera les valeurs exactes sous forme décimale.
Pour la réponse à la question 3°), on donne la valeur exacte sous forme fractionnaire.

Traduire les informations de l'énoncé en utilisant les événements A et B.

$$P\left(\text{A} \cap \overline{\text{B}}\right) = 0{,}002 \;;\; P\left(\overline{\text{A}} \cap \text{B}\right) = 0{,}003 \;;\; P\left(\text{B}\right) = 0{,}04$$

Attention, les $\boxed{\text{et}}$ se traduisent par des intersections et non des « sachant ».

On ne fait pas d'arbre.

1°) Calculer la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche.

On doit calculer $P\left(\text{A} \cap \text{B}\right)$.

A et $\overline{\text{A}}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a $P\left(\text{B}\right) = P\left(\text{A} \cap \text{B}\right) + P\left(\overline{\text{A}} \cap \text{B}\right)$.

On en déduit que $P\left(\text{A} \cap \text{B}\right) = 0{,}04 - 0{,}03 = 0{,}037$.

La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

2°) Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

B et $\overline{\text{B}}$ forment un système complet d'événements donc on peut appliquer la formule des probabilités totales.

$P\left(\text{A}\right) = P\left(\text{A} \cap \text{B}\right) + P\left(\text{A} \cap \overline{\text{B}}\right)$

$= 0{,}037 + 0{,}002$

$= 0{,}039$

La probabilité que l'alarme se déclenche est égale à 0,039.

3°) Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

On cherche $P\left(\text{B} / \text{A}\right)$ (probabilité conditionnelle de B sachant A ou de l'événement B conditionné par l'événement A).

$P\left(\text{B} / \text{A}\right) = \dfrac{P\left(\text{A} \cap \text{B}\right)}{P\left(\text{A}\right)}$ (formule de définition de la probabilité conditionnelle)

$= \dfrac{0{,}037}{0{,}039}$

$= \dfrac{37}{39}$

La probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche est égale à $\dfrac{37}{39}$.

IV.

Dans une entreprise, certains salariés sont en télétravail.
10 % des salariés sont en télétravail ;
22 % des salariés sont des hommes ;
4 % des salariés sont des hommes en télétravail.
On choisit un salarié au hasard. On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

1°) Quelle est la probabilité que ce soit un homme sachant qu'il est en télétravail ?
2°) Quelle est la probabilité qu'il soit en télétravail sachant que c'est un homme ?

1°) $\dfrac{2}{5}$ (une seule réponse sans égalité)

2°) $\dfrac{2}{11}$ (une seule réponse sans égalité)

On va noter :
• A l'événement « Le salarié est en télétravail » ;
• B l'événement « Le salarié est un homme ».

On est dans un cas d'équiprobabilité.

On traduit les informations de l'énoncé en utilisant les événements A et B.

$$P(\text{A}) = 0,1 \ ; \ P(\text{B}) = 0,22 \ ; \ P(\text{A} \cap \text{B}) = 0,04$$

1°)

$$P(\text{B} / \text{A}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{A})}$$

$$= \frac{0,04}{0,1}$$

$$= \frac{2}{5}$$

2°)

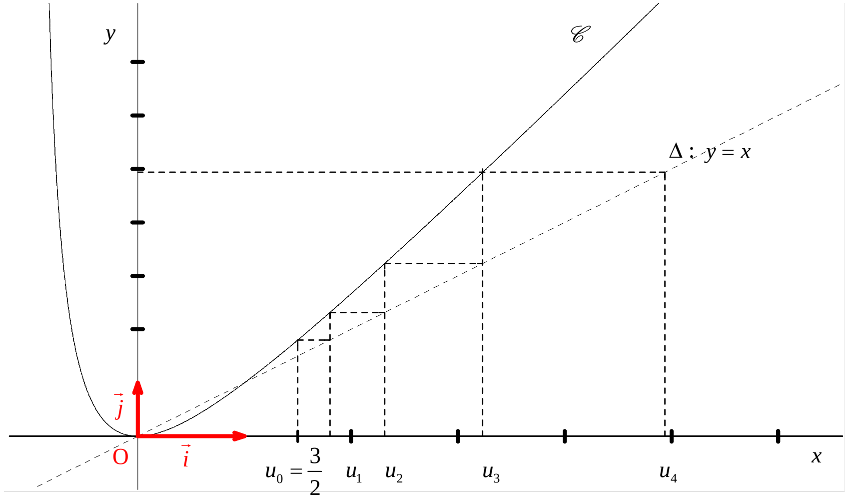
$$P(\text{A} / \text{B}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$$

$$= \frac{0,04}{0,22}$$

$$= \frac{2}{11}$$

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^{\ 2}}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel n. Sur le graphique donné en annexe, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$.
Effectuer sur ce graphique la construction des cinq premiers termes de la suite (sur l'axe des abscisses).
D'après ce graphique, que peut-on conjecturer pour le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite ?
Répondre par une phrase.



On utilise la droite Δ comme droite de report.

On obtient une construction en « marches d'escalier ».

D'après le graphique, on conjecture que la suite (u_n) est croissante et qu'elle tend vers $+\infty$ (on dit qu'elle diverge vers $+\infty$; on peut écrire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$).

On peut vérifier en calculant les termes.

$$u_1 = \frac{2u_0^{\ 2}}{u_0 + 1} = \frac{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{9}{5}$$

$$u_2 = \frac{2u_1^{\ 2}}{u_1 + 1} = \frac{2 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2}{\frac{9}{2} + 1} = \frac{81}{35}$$

$$u_3 = \frac{2u_2^{\ 2}}{u_2 + 1} = \frac{2 \times \left(\frac{81}{35}\right)^2}{\frac{81}{35} + 1} = \frac{6561}{2030}$$

La valeur exacte de u_1 est 1,8 ; des valeurs approchées au dixième de u_2 et u_3 sont respectivement 2,3 et 3,2.
Avec la calculatrice, on obtient $u_4 = 4,936627000...$.

VI.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = a$ où a est un réel non nul fixé et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{u_n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 en fonction de a (un résultat par colonne).

$u_2 = -\dfrac{1}{a}$	$u_3 = -a$	$u_4 = \dfrac{1}{a}$	$u_5 = a$

Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Que vaut u_{2020} ?

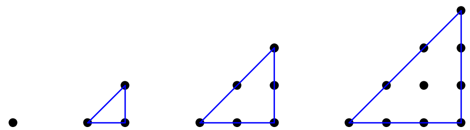
La suite (u_n) est périodique de période 4.

Comme 2020 est un multiple de 4, on a $u_{2020} = u_4 = \dfrac{1}{a}$.

En effet, par la périodicité, on a $u_4 = u_8 = u_{12} = ... = u_{2020}$. Tous les termes dont l'indice est un multiple de 4 ont la même valeur.

VII.

Les figures ci-dessous décrivent le procédé de construction des « nombres triangulaires », générant ainsi une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$. Cette suite est connue depuis l'Antiquité par les mathématiciens grecs qui s'y sont intéressés.



1 point   3 points   6 points   10 points

$u_1 = 1$ $u_2 = 3$ $u_3 = 6$ $u_4 = 10$

On peut noter que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

1°) Donner la valeur de u_5.

$u_5 = 15$ (une seule égalité)

On fait la figure correspondante et on compte 15 points.

2°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, n étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + (n+1)$$

VIII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - nu_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Donner la valeur de u_1.

$u_1 = 1$ (une seule égalité)

On écrit la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - nu_n$ pour $n = 0$. On obtient $u_1 = 1 - 0 \times u_0 = 1$.
La valeur de u_0 n'intervient pas.

2°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}, n étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = 1 - (n-1)u_{n-1}$$

Les parenthèses autour de $n-1$ sont indispensables.

IX.

On se place dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que la courbe Γ d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 12y - 31 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon. Donner la réponse ci-dessous en rédigeant la démarche sur la feuille annexe.

Γ est le cercle de centre $\Omega(-2\,;6)$ et de rayon $\sqrt{71}$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M} \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 12y - 31 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-6)^2 - 36 - 31 = 0$ (on met sous forme canonique les trinômes $x^2 + 4x$ et $y^2 - 12y$)

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-6)^2 = 71$

La dernière égalité obtenue permet d'affirmer que Γ est le cercle de centre $\Omega(-2\,;6)$ et de rayon $\sqrt{71}$.