TS1 spécialité

Contrôle du mardi 3 mars 2020 (50 minutes)

Prénom : …………… **Nom : …………………………………………** **Note : …. / 20**

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points)

1°) On pose $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On admet que la matrice A est inversible.

Déterminer à l'aide de la calculatrice la matrice A^{-1}. On se contentera d'écrire une égalité.

2°) Soit a, b, c trois nombres complexes. On considère le système $\begin{cases}x+y=a\\ y+z=b\\ x+z=c\end{cases}$ d'inconnue $(x,\ y,\ z)\in\mathbb{C}^3$.

En observant que ce système est équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$, exprimer x, y, z en fonction de a, b, c.

………

………

………

………

………

Application :

On considère trois nombres complexes x, y, z tels que les sommes $x+y$, $y+z$, $x+z$ soient des imaginaires purs.
Peut-on en déduire que x, y, z sont des imaginaires purs ? Expliquer brièvement pourquoi.

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

Soit x et y deux nombres complexes. On pose $A=\begin{pmatrix}x & x\\ y & y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}y & -x\\ -y & x\end{pmatrix}$.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes les unes des autres.

1°) Calculer AB et BA.

………

………

2°) Calculer le déterminant des matrices A et B. Les matrices A et B sont-elles inversibles ?

………

………

………

3°) On suppose dans cette question que $x+y=1$.

Vérifier que $A^2 = A$. Que peut-on dire pour A^k, k étant un entier naturel quelconque ?

…...……

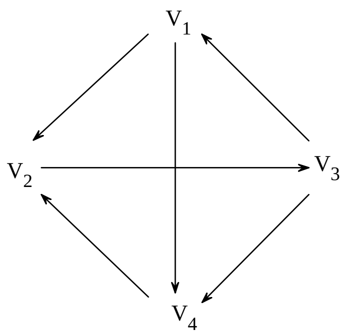
…...……

…...……

…...……

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère quatre villes V_1, V_2, V_3, V_4 dans un pays où le trafic aérien est encore très réduit : il existe seulement un vol direct de V_1 vers V_2 et vers V_4 , de V_2 vers V_3, de V_3 vers V_1 et vers V_4, de V_4 vers V_2.
La situation est représentée par le graphe orienté ci-contre.



1°) Écrire sans justification la matrice M d'adjacence du graphe. On prendra les villes dans leur ordre de numérotation.

2°) Donner ci-dessous, à l'aide de la calculatrice, la matrice $A = M + M^2 + M^3$.

3°) Existe-t-il au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j où i et j sont deux éléments distincts de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ comportant au plus deux escales ? Pourquoi ?

…...……

…...……

…...……

…...……

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = 3$ et $v_0 = -1$ ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

1°) Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On a en particulier $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On pose également $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Quelle relation peut-on écrire entre X_n et X_{n+1}, n étant un entier naturel quelconque, en utilisant la matrice A ?

$\forall n \in \mathbb{N}$ …...……………………… une seule égalité)

2°) On admet que pour tout entier naturel n on a $A^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

…...……

…...……

…...……

…...……

…...……

Corrigé du contrôle du 3-3-2020

I.

1°) On pose $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$. On admet que la matrice A est inversible.

Déterminer à l'aide de la calculatrice la matrice A^{-1}. On se contentera d'écrire une égalité.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

2°) Soit a, b, c trois nombres complexes. On considère le système $\begin{cases}x+y=a\\y+z=b\\x+z=c\end{cases}$ d'inconnue $(x,\,y,\,z)\in\mathbb{C}^3$.

En observant que ce système est équivalent à $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, exprimer x, y, z en fonction de a, b, c.

Comme A est inversible, le système est équivalent à $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ qui donne $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a-b+c}{2}\\\frac{a+b-c}{2}\\\frac{-a+b+c}{2}\end{pmatrix}$.

La solution du système est donc le triplet $\left(\frac{a-b+c}{2}\,;\frac{a+b-c}{2}\,;\frac{-a+b+c}{2}\right)$.

Application :

On considère trois nombres complexes x, y, z tels que les sommes $x+y$, $y+z$, $x+z$ soient des imaginaires purs.
Peut-on en déduire que x, y, z sont des imaginaires purs ? Expliquer brièvement pourquoi.

On pose $a=x+y$, $b=y+z$, $c=x+z$.

D'après ce qui précède, on a alors $x=\frac{a-b+c}{2}$, $y=\frac{a+b-c}{2}$, $z=\frac{-a+b+c}{2}$.

On suppose que a, b, c sont des imaginaires purs. Dans ce cas, $a-b+c$, $a+b-c$, $-a+b+c$ sont aussi des imaginaires purs.
On en déduit que x, y, z sont des imaginaires purs.

II.

Soit x et y deux nombres complexes. On pose $A=\begin{pmatrix}x&x\\y&y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}y&-x\\-y&x\end{pmatrix}$.
Les trois questions de l'exercice sont indépendantes les unes des autres.

1°) Calculer AB et BA.

$$AB=\begin{pmatrix}xy-xy&-x^2+x^2\\y^2-y^2&-xy+xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}xy-xy&xy-xy\\-xy+xy&-xy+xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Les matrices AB et BA sont toutes deux égales à la matrice carrée nulle d'ordre 2.

2°) Calculer le déterminant des matrices A et B. Les matrices A et B sont-elles inversibles ?

$\det A=xy-xy=0$

$\det B=xy-xy=0$

det A et det B sont nuls donc A et B ne sont pas inversibles.

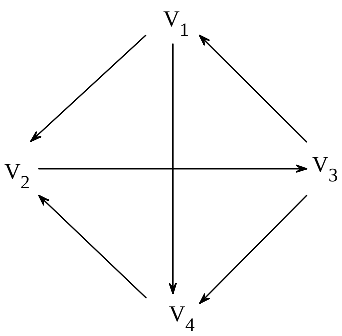
3°) On suppose dans cette question que $x+y=1$.
Vérifier que $A^2=A$. Que peut-on dire pour A^k, k étant un entier naturel quelconque ?

$$A^2=\begin{pmatrix}x^2+xy&x^2+xy\\xy+y^2&y^2+xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(x+y)&x(x+y)\\y(x+y)&y(x+y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\times1&x\times1\\y\times1&y\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&x\\y&y\end{pmatrix}=A$$

On pourrait démontrer par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N}\quad A^k=A$.

III.

On considère quatre villes V_1, V_2, V_3, V_4 dans un pays où le trafic aérien est encore très réduit : il existe seulement un vol direct de V_1 vers V_2 et vers V_4, de V_2 vers V_3, de V_3 vers V_1 et vers V_4, de V_4 vers V_2.
La situation est représentée par le graphe orienté ci-contre.



1°) Écrire sans justification la matrice M d'adjacence du graphe. On prendra les villes dans leur ordre de numérotation.

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

La matrice M n'est pas symétrique.
Il y a des 0 sur la diagonale (absence de boucles).

2°) Donner ci-dessous, à l'aide de la calculatrice, la matrice $\mathrm{A}=\mathrm{M}+\mathrm{M}^2+\mathrm{M}^3$.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\1&2&1&2\\1&3&2&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

3°) Existe-t-il au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j où *i* et *j* sont deux éléments distincts de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ comportant au plus deux escales ? Pourquoi ?

La réponse est oui car la matrice A ne comporte aucun coefficient nul.
Entre deux villes distinctes, il existe toujours une chaîne de longueur au plus 3.

Dans un graphe non orienté, une chaîne est une succession d'arêtes mises bout à bout.

La longueur de la chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

IV.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0=3$ et $v_0=-1$ ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1}=2u_n+v_n$ et $v_{n+1}=u_n+2v_n$.

Il s'agit de l'étude de deux suites couplées.

1°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $\mathrm{X}_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$. On a en particulier $\mathrm{X}_0=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

On pose également $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

Quelle relation peut-on écrire entre X_n et X_{n+1}, *n* étant un entier naturel quelconque, en utilisant la matrice A ?

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{AX}_n\quad \text{(une seule égalité)}$$

2°) On admet que pour tout entier naturel *n* on a $\mathrm{A}^n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&3^n-1\\3^n-1&3^n+1\end{pmatrix}$.

Déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de *n*.

D'après le cours, on sait que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{X}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{X}_n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&3^n-1\\3^n-1&3^n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\times\left(3^n+1\right)-\left(3^n-1\right)\\3\times\left(3^n-1\right)-\left(3^n+1\right)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\times3^n+4\\2\times3^n-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3^n+2\\3^n-2\end{pmatrix}$$

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{cases}u_n=3^n+2\\v_n=3^n-2\end{cases}$.

On peut aisément tester les formules pour $n=0$.