1ère 6 spécialité

Contrôle du vendredi 28 février 2020 (50 minutes)

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….. **Note : ….. / 20**

I. (2 points)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan *P* tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
Compléter les égalités suivantes (un seul résultat à chaque fois) et détailler l'un des deux calculs au choix.

$(2\vec{u} - 3\vec{v})^2 = $ ………….

$(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v}) = $ ………….

………

………

………

………

………

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan *P*, on considère un carré ABCD de côté *a* où *a* est un réel strictement positif.
On note E le symétrique de A par rapport à B.

1°) Le but de cette question est d'exprimer le produit scalaire $p = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ED}$ en fonction de *a*.

● En observant que l'on peut écrire $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles), écrire *p* comme somme de quatre produits scalaires.

$p = $ ……………………………………………………………………………………

(écrire très lisiblement et sans ratures)

● Achever le calcul de *p* au brouillon et donner le résultat sur la ligne ci-dessous.

……………………………………… (une seule égalité)

2°) On note θ la mesure en radians de l'un des angles obtus formé par les droites (AC) et (ED).
À l'aide de la valeur de *p* obtenue dans ce cas, déterminer la valeur de $\cos\theta$.

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit A, B, C trois points quelconques du plan *P* tels que B et C ne soient pas confondus. On note I le milieu de $[AB]$.

1°) Compléter les égalités suivantes permettant de réduire les sommes vectorielles du membre de gauche.

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = $ ……………

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = $ ……………

2°) On note *E* l'ensemble des points M du plan *P* tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$.
Compléter les lignes en pointillés ci-dessous par des égalités de produits scalaires.

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$M \in E \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………

À partir de la dernière égalité (et en l'interprétant convenablement), formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

L'ensemble E est ……………………………………………………………………………………………

IV. (2 points)

Soit ABC un triangle quelconque non rectangle en A.
Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AC]$ recoupe la droite (AB) en un point H.
Que peut-on dire des droites (CH) et (AB) ? Justifier.

………

………

………

………

………

V. (4 points 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Pour lutter contre une maladie dans un pays, un laboratoire a mis au point un test de dépistage par prise de sang.
Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle A l'événement « Le patient est atteint par la maladie étudiée » et B l'événement « Le patient a un dépistage positif ».
On admet que 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif et que 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif. On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1°) On choisit un patient au hasard.
Calculer la probabilité que le patient ait un dépistage positif. On donnera le résultat sous forme décimale exacte.

………

………

………

………

………

2°) Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Que peut-on en penser ? Argumenter la réponse.

………

………

………

………

………

………

VI. (5 points : 1°) 3 points ; 3°) 2 points)

On se place dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) On donne les points $E(-1\,;3)$, $F(2\,;5)$, $G\left(-\dfrac{1}{3}\,;3\right)$.
Compléter les égalités ci-dessous :

$EF^2 =$ ………. $OG^2 =$ ……….

Écrire ci-dessous une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre E passant par le milieu I de $[EF]$.

$\mathcal{C}$: ……………………………………………………

2°) Démontrer que la courbe Γ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 10y - 11 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon.

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 28-2-2020

Le barème est sur 21.

I.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan P tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
Compléter les égalités suivantes (un seul résultat à chaque fois) et détailler l'un des deux calculs au choix.

$\left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right)^2 = 85$ $\qquad\qquad$ $\left(2\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - 3\vec{v}\right) = -24$

Pour la première égalité, il s'agit du calcul d'un carré scalaire.

$$\begin{aligned}
\left(2\vec{u} - 3\vec{v}\right)^2 &= 4\vec{u}^2 - 12\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + 9\vec{v}^2 \quad \text{(identité remarquable scalaire)}\\
&= 4\|\vec{u}\|^2 - 12\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + 9\|\vec{v}\|^2\\
&= 4\times4 - 12\times1 + 9\times9\\
&= 85
\end{aligned}$$

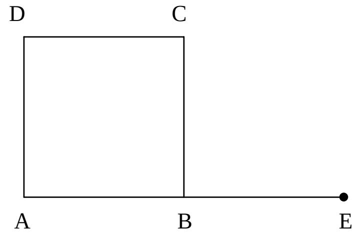
Pour la deuxième égalité, il s'agit d'un calcul de produit scalaire.

$$\begin{aligned}
\left(2\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - 3\vec{v}\right) &= \left(2\vec{u}\right) \cdot \vec{u} - \left(2\vec{u}\right) \cdot \left(3\vec{v}\right) + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \left(3\vec{v}\right) \quad \text{(on applique la propriété de bilinéarité du produit scalaire)}\\
&= 2\left(\vec{u} \cdot \vec{u}\right) - 2\times3\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + \vec{u} \cdot \vec{v} - 3\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) \quad \text{(on applique la propriété de bilinéarité du produit scalaire)}\\
&= 2\vec{u}^2 - 6\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + \vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v}^2\\
&= 2\vec{u}^2 - 5\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) - 3\vec{v}^2\\
&= 2\|\vec{u}\|^2 - 5\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) - 3\|\vec{v}\|^2\\
&= 2\times4 - 5\times1 - 3\times9\\
&= 8 - 5 - 27\\
&= -24
\end{aligned}$$

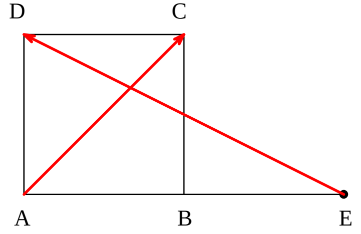
II.

Dans le plan P, on considère un carré ABCD de côté a où a est un réel strictement positif.
On note E le symétrique de A par rapport à B.

On commence par faire une figure assez grande en respectant la disposition traditionnelle des points.



1°) Le but de cette question est d'exprimer le produit scalaire $p = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ED}$ en fonction de a.



• En observant que l'on peut écrire $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles), écrire p comme somme de quatre produits scalaires.

$$p = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$$

(écrire très lisiblement et sans ratures)

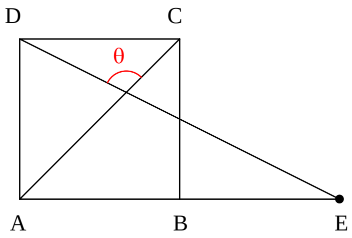
On utilise la propriété de bilinéarité du produit scalaire.

• Achever le calcul de p au brouillon et donner le résultat sur la ligne ci-dessous.

$p = -a^2$ (une seule égalité)

$$\begin{aligned}
p &= -a\times2a + 0 + 0 + a\times a \quad \text{(utilisation de l'orthogonalité et de la colinéarité)}\\
&= -2a^2 + a^2\\
&= -a^2
\end{aligned}$$

2°) On note θ la mesure en radians de l'un des angles obtus formé par les droites (AC) et (ED).
À l'aide de la valeur de p obtenue dans ce cas, déterminer la valeur de $\cos\theta$.



On constate sur la figure que θ est la mesure en radians de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$.

On peut écrire $p = AC \times ED \times \cos\theta$.
Or $AC = a\sqrt{2}$ (formule de la longueur de la diagonale d'un carré) et $ED = a\sqrt{5}$ (application du théorème de Pythagore).

On fait attention aux notations AC et ED. Il s'agit de distances et non de vecteurs.

On en déduit que $a\sqrt{2} \times a\sqrt{5} \times \cos\theta = -a^2$ ce qui donne $a^2\sqrt{10} \times \cos\theta = -a^2$ (on utilise l'égalité $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$).
On obtient finalement $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
On trouve un résultat négatif ce qui est logique puisque θ une mesure en radians d'angle obtus (on peut d'ailleurs obtenir une valeur approchée de θ grâce à la calculatrice).

III.

Soit A, B, C trois points quelconques du plan P tels que B et C ne soient pas confondus. On note I le milieu de $[AB]$.

1°) Compléter les égalités suivantes permettant de réduire les sommes vectorielles du membre de gauche.

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ $\qquad \forall M \in P \quad \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$

Les deux égalités sont des propriétés du cours (qui se démontrent grâce à la relation de Chasles).

La deuxième égalité se démontre en écrivant $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$.

2°) On note E l'ensemble des points M du plan P tels que $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$.
Compléter les lignes en pointillés ci-dessous par des égalités de produits scalaires.

Soit M un point quelconque de P.

$$M \in E \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

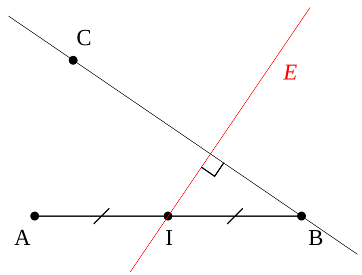
$$\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{MI}\right) \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{CB}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

À partir de la dernière égalité (et en l'interprétant convenablement), formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

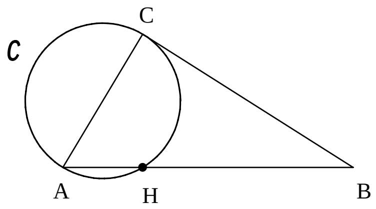
L'ensemble E est la droite passant par I et perpendiculaire à (BC).



IV.

Soit ABC un triangle quelconque non rectangle en A.
Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AC]$ recoupe la droite (AB) en un point H.
Que peut-on dire des droites (CH) et (AB) ? Justifier.

On commence par faire une figure assez grande.

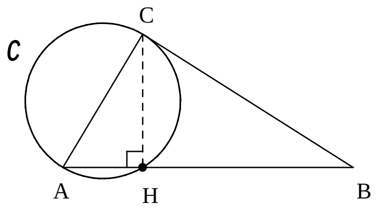


On sait que $H \in \mathcal{C}$ et que $[AC]$ est $\boxed{\text{un}}$ diamètre de $\mathcal{C}$.

Or on a appris que si un triangle est inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre, alors il est rectangle (et le diamètre est l'hypoténuse).

On peut donc affirmer que le triangle ACH est rectangle en H.

Comme $H \in (AB)$, on en déduit que $(CH) \perp (AB)$.



On peut dire que H est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC et que (CH) est la hauteur issue de C dans la triangle ABC.
On peut également dire que H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

On fait attention aux notations : une droite se note avec des parenthèses.

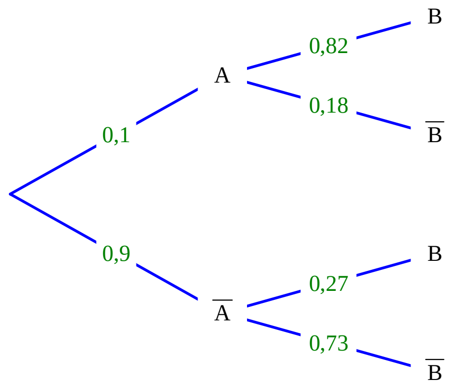
V.

Pour lutter contre une maladie dans un pays, un laboratoire a mis au point un test de dépistage par prise de sang.
Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle A l'événement « Le patient est atteint par la maladie étudiée » et B l'événement « Le patient a un dépistage positif ».
On admet que 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif et que 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif. On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1°) On choisit un patient au hasard.
Calculer la probabilité que le patient ait un dépistage positif. On donnera le résultat sous forme décimale exacte.

On cherche $P(B)$.

On commence par faire un arbre de probabilités en écrivant les probabilités sous forme décimale.



A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$= P(A) \times P(B / A) + P(\overline{A}) \times P(B / \overline{A})$$ (car A et $\overline{A}$ ont des probabilités non nulles)

$$= 0,1 \times 0,82 + 0,9 \times 0,27$$

$$= 0,325$$

La probabilité que le patient ait un dépistage positif est égale à 0,325.

2°) Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Que peut-on en penser ? Argumenter la réponse.

On cherche $P(A / B)$ (probabilité conditionnelle de A sachant B ou de l'événement A conditionné par l'événement B).

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ (formule de définition d'une probabilité conditionnelle)

$$= \frac{0,1 \times 0,82}{0,325}$$

$$= \frac{0,082}{0,325}$$

$$= \frac{82}{325}$$

$$= 0,252307692...$$

Le résultat est très légèrement supérieur à $\frac{1}{4}$ donc le patient a un peu plus d'un chance sur quatre d'avoir contracté la maladie.

VI.

On se place dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) On donne les points $\mathrm{E}(-1\,;3)$, $\mathrm{F}(2\,;5)$, $\mathrm{G}\left(-\frac{1}{3}\,;3\right)$.
Compléter les égalités ci-dessous :

$\mathrm{EF}^2 = 13$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{OG}^2 = \frac{82}{9}$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\left|\begin{array}{l} 2-(-1)=3 \\ 5-3=2 \end{array}\right.$ donc $\mathrm{EF}^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

On effectue le calcul de OG^2 immédiatement.
On utilise la propriété : « Le carré de la distance d'un point à l'origine du repère est égale à la somme des carrés des coordonnées de ce point ».

$$\mathrm{OG}^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3^2 = \frac{1}{9} + 9 = \frac{82}{2}$$

Écrire ci-dessous une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre E passant par le milieu I de $[\mathrm{EF}]$.

$$\mathcal{C} : (x+1)^2 + (y-3)^2 = \frac{13}{4}$$

Le rayon de $\mathcal{C}$ est $r = \mathrm{EI} = \frac{\mathrm{EF}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. On a donc $r^2 = \frac{13}{4}$.

On peut aussi calculer directement EI avec la formule analytique de la distance de deux points dans un repère orthonormé mais c'est un peu maladroit.

$\mathcal{C}$ a donc pour équation $\left(x - x_{\mathrm{E}}\right)^2 + \left(y - y_{\mathrm{E}}\right)^2 = \frac{13}{4}$ soit $(x+1)^2 + (y-3)^2 = \frac{13}{4}$.

On n'est pas obligé de développer cette équation pour obtenir une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ (le développement donne $x^2 + y^2 + 2x - 6y + \frac{27}{4} = 0$).

2°) Démontrer que la courbe Γ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 10y - 11 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon.

Soit M un point quelconque de *P* de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M} \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 10y - 11 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+5)^2 - 25 - 11 = 0$ (on met sous forme canonique les trinômes $x^2 - 2x$ et $y^2 + 10y$)

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+5)^2 = 37$

La dernière égalité obtenue permet d'affirmer que Γ est le cercle de centre $\Omega(1\,;-5)$ et de rayon $\sqrt{37}$.

Le nombre $\sqrt{37}$ se construit aisément à la règle et au compas à partir d'un segment de longueur 1. C'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs 6 et 1 (en effet, $37 = 6^2 + 1^2$).