TS1

Contrôle du samedi 25 janvier 2020 (4 heures)

Partie commune (3 heures)

- Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet.

- Le barème est donné sur 20.

- Le sujet comporte une feuille annexe à remettre avec la copie.

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une filière B et une filière C. Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.
Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B.
Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.
On sait de plus que :
- 20 % des étudiants de la filière A sont des filles ;
- 30 % des étudiants de la filière B sont des filles ;
- 40 % des étudiants de la filière C sont des filles.

On choisit un étudiant au hasard.

On donnera tous les résultats sous forme décimale.

1°) Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit une fille.
On commencera par définir clairement des événements et l'on s'efforcera de rédiger le plus clairement possible.

2°) Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit dans la filière A sachant c'est un garçon.

3°) Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit dans la filière A ou dans la filière B sachant que c'est une fille.

4°) On choisit un échantillon aléatoire avec remise de 48 étudiants de la filière B.
Quelle est la probabilité qu'au moins le tiers soit des filles ?
On répondra directement sur la copie en donnant la valeur arrondie au millième.

II. (7 points)

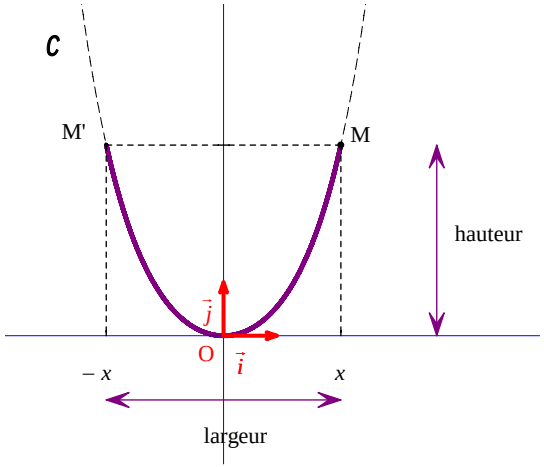
Partie 1 (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - e^{-x} - 4 = 0$ en utilisant le changement d'inconnue $X = e^x$.

2°) Étudier le signe de l'expression $e^x - e^{-x} - 4$ suivant les valeurs de x.

Partie 2 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On a représenté sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Cette courbe est appelée une « chaînette ». On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait gras. On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M′ comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe $\mathcal{C}$ du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + e^{-x} - 4x - 2$ sur l'intervalle $I = [0\,;+\infty[$.

1°) Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation $f(x) = 0 \quad (E)$.

2°) Calculer $f'(x)$. On admettra que la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est la fonction $x \mapsto -e^{-x}$.

À l'aide des résultats de la **partie 1**, dresser un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f sur I.
On attend les valeurs exactes des extremums.

3°) Démontrer, en rédigeant soigneusement, que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;3]$ puis donner la valeur arrondie au millième de α.

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n^{\ 2}}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel *n*.
On admettra que tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à 1.

1°) Sur le graphique donné en annexe, la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = \frac{2x^2}{x+1}$.

Effectuer sur ce graphique la construction des quatre premiers termes de la suite (sur l'axe des abscisses).

D'après ce graphique, que peut-on conjecturer pour le sens de variation de la suite et pour sa limite ?
Répondre par une phrase.

2°) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n - 1)}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel *n*.

Déterminer alors en justifiant soigneusement le sens de variation de (u_n).

3°) On suppose que la suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ.

Écrire, en justifiant, l'équation (E) vérifiée par ℓ. Résoudre (E) et conclure sur la limite de (u_n).

4°) On considère l'algorithme ci-dessous où la variable A saisie en entrée est un réel.
On précise que les autres variables qui interviennent sont *u* qui est un réel et *n* qui est un entier naturel.

Entrée :
Saisir A

Initialisation :
u prend la valeur $\frac{3}{2}$
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $u < \mathrm{A}$ **Faire**
  u prend la valeur $\frac{2u^2}{1+u}$
  n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

• Quelle valeur de *n* obtient-on en sortie pour $\mathrm{A} = 100$ en entrée ?

• Interpréter pour la suite (u_n) la valeur de *n* affichée en sortie pour une valeur de A strictement positive saisie en entrée. On répondra par une phrase.

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
À tout point M d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z' = 2z - z^2$.
Le point M' est appelé image du point M.

1°) Déterminer les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2°) Soit M un point d'affixe *z* et M' son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_{\mathrm{N}} = z^2$.
Démontrer que M est le milieu du segment $[\mathrm{NM}']$.

3°) Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe *z* appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes *z* et z_{N}. En déduire que N appartient à $\mathcal{C}$.

b) Soit A le point d'affixe 1. Démontrer sans utiliser la forme algébrique de *z* que $\mathrm{AM} = \mathrm{MN}$.

c) Justifier la construction suivante à la règle et au compas de l'image d'un point M quelconque de $\mathcal{C}$ distinct de A.

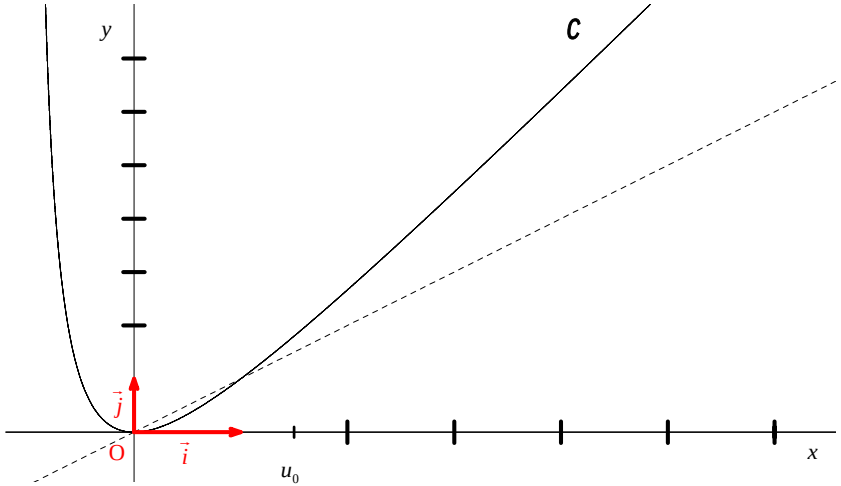
> On trace le cercle Γ de centre M passant par A. Ce cercle recoupe le cercle $\mathcal{C}$ au point N.
> Tracer ensuite la droite (MN). M' est le deuxième point d'intersection de (MN) et de Γ.

Effectuer cette construction sur le graphique donnée en annexe.

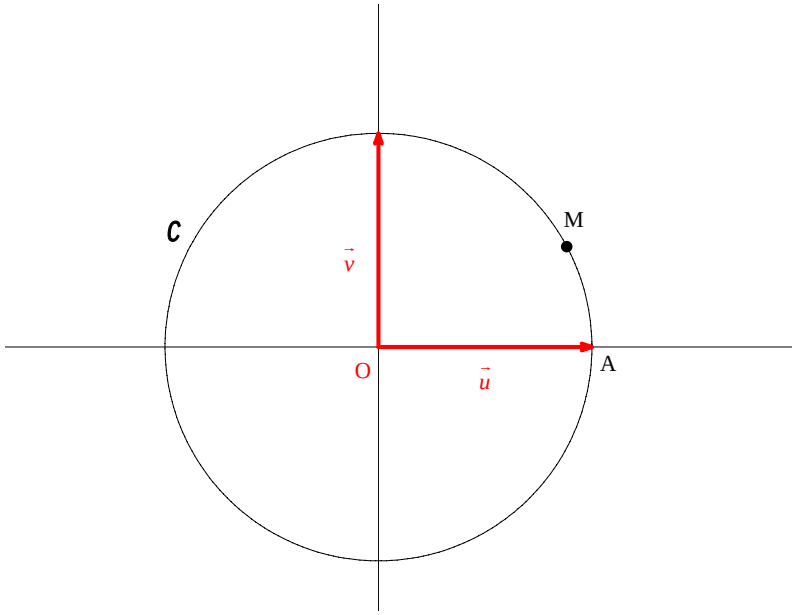
Annexe

Numéro : ….. **Prénom et nom : ……..……**

III. 1°) 1 point



IV. 3°) c) 1 point



Copie pour le contrôle du 25-1-2020

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……

I.

1°) ……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) ……

……

……

……

3°) ……

……

……

……

……

……

……

4°) …….. (une seule réponse sans justifier)

II. (7 points)

Partie 1 (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) ……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) ……

……

……

……

……

……

……

Partie 2 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) ……

……

……

……

……

……

……

2°) ……

3°) ……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) ……

2°) ……

……

……

……

3°) ……

……

……

……

4°) • ……

• ……

……

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point)

1°) ……

……

……

……

2°) ……

……

……

……

3°) a) ……

……

……

……

b) ……

……

……

……

c) ……

……

……

Corrigé du contrôle du 25-1-2020

I.

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une filière B et une filière C. Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.
Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B.
Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.
On sait de plus que :
- 20 % des étudiants de la filière A sont des filles ;
- 30 % des étudiants de la filière B sont des filles ;
- 40 % des étudiants de la filière C sont des filles.

On choisit un étudiant au hasard.

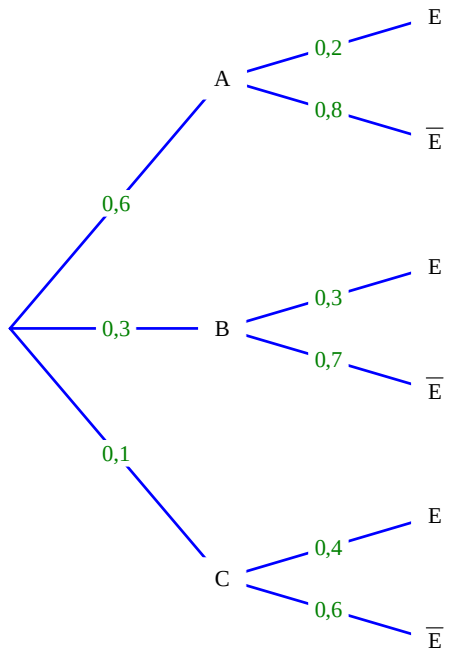
On donnera tous les résultats sous forme décimale.

1°) Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit une fille.
On commencera par définir clairement des événements et l'on s'efforcera de rédiger le plus clairement possible.

On considère les événements suivants :
A : « L'étudiant est dans la filière A » ;
B : « L'étudiant est dans la filière B » ;
C : « L'étudiant est dans la filière C » ;
E : « L'élève est une fille ».

On note x l'effectif de la filière C. x est un entier naturel non nul.

L'effectif de la filière B est donc égal à $3x$.
L'effectif de la filière A est égal à $2\times 3x = 6x$.
L'effectif total est donc égal à $x+3x+6x=10x$.
On est en situation d'équiprobabilité donc $P(\mathrm{A})=\dfrac{6x}{10x}=0,6$, $P(\mathrm{B})=\dfrac{3x}{10x}=0,3$, $P(\mathrm{C})=\dfrac{x}{10x}=0,1$.



A, B, C constituent un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales on peut écrire :

$$P(\mathrm{E})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{E})+P(\mathrm{B}\cap\mathrm{E})+P(\mathrm{C}\cap\mathrm{E})$$

$$=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{E}/\mathrm{A})+P(\mathrm{B})\times P(\mathrm{E}/\mathrm{B})+P(\mathrm{C})\times P(\mathrm{E}/\mathrm{C})$$

$$=0,2\times 0,6+0,3\times 0,3+0,4\times 0,1$$

$$=0,25$$

2°) Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit dans la filière A sachant c'est un garçon.

$$P(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{E}})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{E}})}{P(\overline{\mathrm{E}})}$$ (formule de définition de la probabilité conditionnelle)

$$=\frac{P(\mathrm{A})\times P(\overline{\mathrm{E}}/\mathrm{A})}{1-P(\mathrm{E})}$$

$$=\frac{0,8\times 0,6}{0,75}$$

$$=0,64$$

La probabilité que l'étudiant choisi soit dans la filière A sachant c'est un garçon est égale à 0,64.

3°) Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit dans la filière A ou dans la filière B sachant que c'est une fille.

Calculer la probabilité que l'étudiant soit dans la filière A ou dans la filière B sachant que c'est une fille revient à chercher $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}/\mathrm{E})$.

1ère méthode :

Comme A et B sont des événements incompatibles, on a $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}/\mathrm{E})=P(\mathrm{A}/\mathrm{E})+P(\mathrm{B}/\mathrm{E})$ (propriété des probabilités conditionnelles).

$$\begin{aligned}P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}/\mathrm{E})&=P(\mathrm{A}/\mathrm{E})+P(\mathrm{B}/\mathrm{E})\\&=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{E})}{P(\mathrm{E})}+\frac{P(\mathrm{B}\cap\mathrm{E})}{P(\mathrm{E})}\\&=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{E})+P(\mathrm{B}\cap\mathrm{E})}{P(\mathrm{E})}\\&=\frac{0,6\times0,2+0,3\times0,3}{0,25}\\&=0,84\end{aligned}$$

2e méthode :

On utilise l'événement contraire de la réunion de A et de B, à savoir C.

On a $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}/\mathrm{E})=1-P(\mathrm{C}/\mathrm{E})$.

La fin ne pose pas de difficulté.

La probabilité que l'étudiant soit dans la filière A ou dans la filière B sachant que c'est une fille est égale à 0,84.

4°) On choisit un échantillon aléatoire avec remise de 48 étudiants de la filière B.
Quelle est la probabilité qu'au moins le tiers soit des filles ?
On répondra directement sur la copie en donnant la valeur arrondie au millième.

0,358

On est dans le cadre d'une épreuve de Bernoulli n'ayant que deux issues « être dans la filière B » avec une probabilité de 0,3 et « ne pas être dans la filière B » avec une probabilité de 0,7.
Le choix d'un échantillon aléatoire de 48 étudiants correspond à la répétition de cette épreuve de Bernoulli dans des conditions identiques indépendantes. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de filles suit la loi binomiale de paramètres $n=48$ et $p=P(\mathrm{E}/\mathrm{B})=0,3$.

On calcule le tiers de 48 c'est-à-dire 16. On cherche $P(\mathrm{X}\geqslant16)$.
On utilise l'égalité $P(\mathrm{X}\geqslant16)=1-P(\mathrm{X}\leqslant15)$ pour pouvoir utiliser commodément la calculatrice.

On obtient l'affichage suivant : 0,3577344616.

II.

Partie 1

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-4=0$ en utilisant le changement d'inconnue $X=\mathrm{e}^x$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-4=0$ (1).

On pose $X=\mathrm{e}^x$ (changement d'inconnue).

(1) s'écrit : $X-\dfrac{1}{X}-4=0$ $(1')$.

On doit résoudre $(1')$.

$(1')\Leftrightarrow X^2-4X-1=0$

$\Leftrightarrow X=2+\sqrt{5}$ ou $X=2-\sqrt{5}$ (racines obtenues en calculant le discriminant réduit)

On revient à la résolution de l'équation (1).

$(1)\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=2+\sqrt{5}$ ou $\mathrm{e}^x=2-\sqrt{5}$ (impossible puisque $2-\sqrt{5}<0$)

$\Leftrightarrow x=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

L'ensemble des solutions de (1) est donc $S=\left\{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right\}$.

2°) Étudier le signe de l'expression $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-4$ suivant les valeurs de x.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-4&=\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}-4\\&=\frac{\left(\mathrm{e}^x\right)^2-4\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x}\\&=\frac{\left(\mathrm{e}^x-\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\left(\mathrm{e}^x-\left(2-\sqrt{5}\right)\right)}{\mathrm{e}^x}\end{aligned}$$

e^x est toujours strictement positive et l'expression $\mathrm{e}^x-\left(2-\sqrt{5}\right)$ est toujours strictement positive, donc le signe de l'expression $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-4$ ne dépend que du signe de $\mathrm{e}^x-\left(2+\sqrt{5}\right)$.

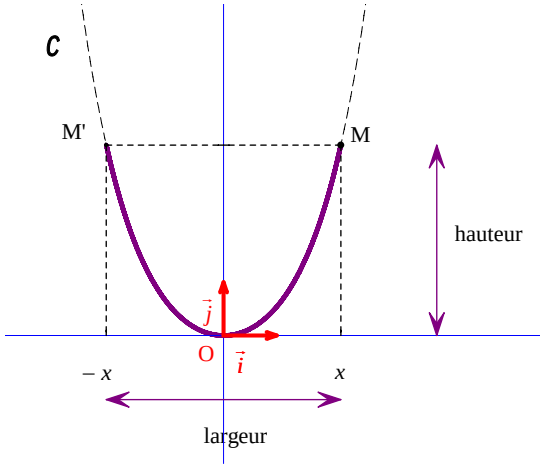
$\mathrm{e}^x-\left(2+\sqrt{5}\right)>0\Leftrightarrow x>\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

$\mathrm{e}^x-\left(2+\sqrt{5}\right)<0\Leftrightarrow x<\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

x	$-\infty$		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
Signe de $e^{x}-e^{-x}-4$		$-$	0	$+$	

Partie 2

On a représenté sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Cette courbe est appelée une « chaînette ». On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait gras. On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M′ comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe $\mathcal{C}$ du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{x}+e^{-x}-4x-2$ sur l'intervalle $I=\left[0\,;+\infty\right[$.

1°) Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation $f(x)=0 \quad (\mathrm{E})$.

La largeur de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ chaînette vaut $2x$ et sa hauteur vaut $\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)$.

On cherche les valeurs de $x\in I$ pour lesquelles la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur ce qui revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles on a $\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)=2x \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow e^{x}+e^{-x}-4x-2=0$

$\Leftrightarrow f(x)=0$

Déterminer x pour que la largeur de l'arc de chaînette est égale à sa hauteur revient donc à résoudre l'équation $f(x)=0 \quad (\mathrm{E})$ d'inconnue $x\in I$.

2°) Calculer $f'(x)$. On admettra que la dérivée de la fonction $x\mapsto e^{-x}$ est la fonction $x\mapsto -e^{-x}$.

À l'aide des résultats de la **partie 1**, dresser un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f sur I.
On attend les valeurs exactes des extremums.

La fonction f est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et l'on a $\forall x\in I \quad f'(x)=e^{x}-e^{-x}-4$.
Dans la partie A, on a étudié le signe de $e^{x}-e^{-x}-4$ suivant les valeurs de x. On a donc immédiatement le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$	$\nearrow$	

$$f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)=e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}+e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-2$$

$$=2+\sqrt{5}+\frac{1}{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-2$$

$$=2+\sqrt{5}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-2$$

$$=2+\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}^{2}-2^{2}}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-2$$

$$=2+\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}-2}{1}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-2$$

$$=\cancel{2}+\sqrt{5}+\sqrt{5}-\cancel{2}-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-2$$

$$=2\sqrt{5}-2-4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

3°) Démontrer, en rédigeant soigneusement, que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;3]$ puis donner la valeur arrondie au millième de α.

Démontrons que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $J=[2\,;3]$.

C_1 : f est une fonction continue sur I comme somme de fonctions continues et donc, par restriction, sur J.

C_2 : $f(2)=e^{2}+e^{-2}-10=-2{,}47560861...$ et $f(3)=e^{3}+e^{-3}-14=6{,}13532399...$

0 est compris entre $f(2)$ et $f(3)$ (autrement dit, 0 est une « valeur intermédiaire »).

C_3 : f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right);+\infty\right[$. Or $J \subset \left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right);+\infty\right[$. Donc f est strictement croissante sur J.

f vérifie les conditions C_1, C_2, C_3 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution dans J.

Les conditions C_1 et C_2 assurent l'existence d'une solution ; la condition C_3 assure l'unicité.

On encadre α par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

Pour cela, on peut utiliser la méthode de balayage ou de dichotomie.

La touche « résol » ne marche pas : elle ne donne que la solution 0 qui n'est pas dans J.

On peut tracer la courbe et utiliser la commande « racine ». On obtient l'affichage : 2,4664971.
La valeur arrondie au millième de α est 2,466.

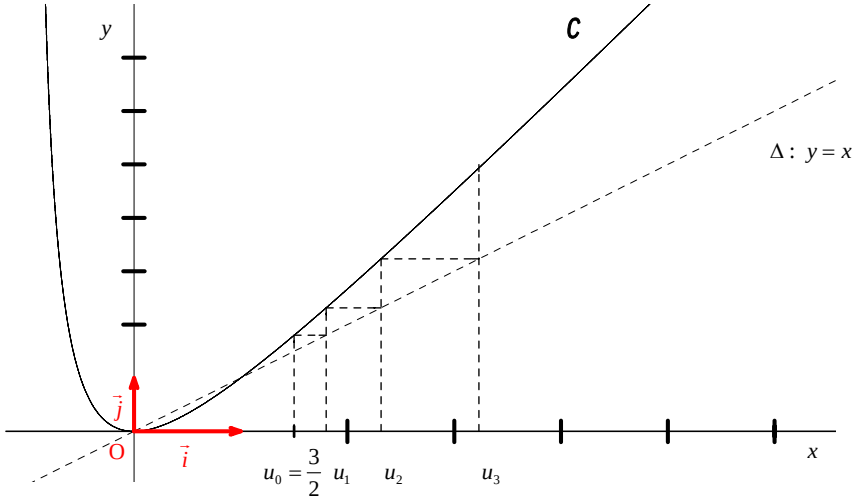
III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n^{\ 2}}{u_n+1}$ pour tout entier naturel n.
On admettra que tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à 1.

1°) Sur le graphique donné en annexe, la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = \frac{2x^2}{x+1}$.

Effectuer sur ce graphique la construction des quatre premiers termes de la suite (sur l'axe des abscisses).

D'après ce graphique, que peut-on conjecturer pour le sens de variation de la suite et pour sa limite ?
Répondre par une phrase.



D'après le graphique, on conjecture que la suite (u_n) est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

On peut vérifier en calculant les termes.

$$u_1 = \frac{2u_0^{\ 2}}{u_0+1} = \frac{2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{9}{5}$$

$$u_2 = \frac{2u_1^{\ 2}}{u_1+1} = \frac{2\times\left(\frac{9}{2}\right)^2}{\frac{9}{2}+1} = \frac{81}{35}$$

$$u_3 = \frac{2u_2^{\ 2}}{u_2+1} = \frac{2\times\left(\frac{81}{35}\right)^2}{\frac{81}{35}+1} = \frac{6561}{2030}$$

La valeur exacte de u_1 est 1,8 ; des valeurs approchées au dixième de u_2 et u_3 sont respectivement 2,3 et 3,2.

2°) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n-1)}{u_n+1}$ pour tout entier naturel n.

Déterminer alors en justifiant soigneusement le sens de variation de (u_n).

Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n-1)}{u_n+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^{\ 2}}{u_n+1} - u_n$$

$$= \frac{u_n^{\ 2} - u_n}{u_n+1}$$

$$= \frac{u_n(u_n-1)}{u_n+1}$$

Comme il est admis que tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à 1, on déduit aisément que $\frac{u_n(u_n-1)}{u_n+1} > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante ce qui valide la conjecture de la question 1°) sur le sens de variation de la suite (u_n).

3°) On suppose que la suite (u_n) converge vers une limite finie l.
Écrire, en justifiant, l'équation (E) vérifiée par l. Résoudre (E) et conclure sur la limite de (u_n).

$u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ de manière évidente (car la suite (u_n) converge vers l donc la suite (u_{n+1}) converge vers la même limite puisqu'elle a les mêmes termes mais décalée de 1).

En utilisant les propriétés d'opérations algébriques sur les limites, on a $\frac{2u_n^{\ 2}}{u_n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2l^2}{l+1}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n^{\ 2}}{u_n + 1}$, on peut écrire $\dfrac{2\ell^2}{\ell+1} = \ell \ \ (\mathrm{E})$.

On dit que l'égalité (E) s'obtient par passage à la limite (ou en passant à la limite) dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^{\ 2}}{u_n + 1}$.

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow 2\ell^2 = \ell(\ell+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\ell^2 - \ell(\ell+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell\left[2\ell - (\ell+1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell(\ell-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1$$

Comme la suite (u_n) est croissante, tous les termes sont supérieurs au premier terme qui est égal à $\dfrac{3}{2}$.

Par conséquent, $\ell \geqslant \dfrac{3}{2}$.

On en déduit que l'hypothèse « (u_n) converge vers une limite finie ℓ. » est absurde.

Comme (u_n) est croissante, on en déduit qu'elle diverge vers $+\infty$ ce qui est conforme à la conjecture émise au 1°).

4°) On considère l'algorithme ci-dessous où la variable A saisie en entrée est un réel.
On précise que les autres variables qui interviennent sont *u* qui est un réel et *n* qui est un entier naturel.

Entrée :
Saisir A

Initialisation :
u prend la valeur $\dfrac{3}{2}$
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $u < \mathrm{A}$ **Faire**
  u prend la valeur $\dfrac{2u^2}{1+u}$
  n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

• Quelle valeur de *n* obtient-on en sortie pour $\mathrm{A} = 100$ en entrée ?

On peut faire tourner l'algorithme « à la main » ou faire un tableau d'évolution des variables *n* et *u* ou le programmer sur calculatrice.

u	*n*
1,5	0
1,8	1
2,3	2
3,2	3
4,6	4
7,9	5
14,02	6
26,2	7
50,5	8
99,03	9
196,07	10

Lorsqu'on entre pour A la valeur 100, la valeur de *n* qui s'affiche en sortie est 9.
C'est la plus petite valeur de *n* pour laquelle u_n est supérieure ou égale à 100.

Comme la suite (u_n) est croissante, tous les termes de la suite seront supérieurs ou égaux à 100 à partir de u_9.

• Interpréter pour la suite (u_n) la valeur de *n* affichée en sortie pour une valeur de A strictement positive saisie en entrée. On répondra par une phrase.

La valeur qui s'affiche en sortie est le plus petit entier naturel *n* (ou la première valeur de *n*) à partir duquel (de laquelle) tous les termes de la suite seront supérieurs ou égaux à A.
Il s'agit d'un algorithme de détermination de valeur seuil.

IV.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
À tout point M d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z' = 2z - z^2$.
Le point M' est appelé image du point M.

1°) Déterminer les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

On cherche les nombres complexes *z* tels que $z' = 2 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow 2z - z^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \quad (1')$$

$(1')$ est une équation du second degré à coefficients réels dont les racines sont $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$ (utilisation du discriminant réduit qui vaut – 2 et vérification avec la calculatrice).

Donc les points ayant comme image le point d'affixe 2 sont les points M_1 d'affixe $1+i$ et M_2 d'affixe $1-i$.

2°) Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
Démontrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

$$\frac{z_N + z_{M'}}{2} = \frac{z^2 + z'}{2}$$

$$= \frac{\cancel{z^2} + 2z \cancel{- z^2}}{2}$$

$$= z$$

$$= z_M$$

On en déduit que M est le milieu du segment $[NM']$.

N.-B. : On ne peut pas utiliser les distances et donc les modules pour résoudre cette question.

3°) Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N. En déduire que N appartient à $\mathcal{C}$.

Le point M a pour affixe z et appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 ce qui permet d'écrire $|z| = 1$.

Le point N a pour affixe $z_N = z^2$, donc $|z_N| = |z^2| = |z|^2$.
Or $|z| = 1$ donc $|z_N| = 1$ ce qui permet de conclure que N appartient au cercle $\mathcal{C}$.

b) Soit A le point d'affixe 1. Démontrer sans utiliser la forme algébrique de z que $AM = MN$.

$AM = |z - 1|$

$MN = |z_N - z| = |z^2 - z| = |z(z-1)| = |z| \times |z-1|$

Or $|z| = 1$ donc on a $MN = |z-1|$.

On peut donc écrire $AM = MN = |z-1|$.

c) Justifier la construction suivante à la règle et au compas de l'image d'un point M quelconque de $\mathcal{C}$ distinct de A.

On trace le cercle Γ de centre M passant par A. Ce cercle recoupe le cercle $\mathcal{C}$ au point N. Tracer ensuite la droite (MN). M' est le deuxième point d'intersection de (MN) et de Γ.

Effectuer cette construction sur le graphique donnée en annexe.

D'après la question 3°) a), comme $M \in \mathcal{C}$, on a aussi $N \in \mathcal{C}$.

D'après la question 3°) b), $AM = MN$ donc N appartient au cercle Γ de centre M passant par A.
On a supposé que point M est distinct de A donc $z \neq 1$ ce qui entraîne immédiatement que $z^2 \neq 1$.
Ainsi, N est distinct de A. Le point N est donc bien le point en lequel Γ recoupe $\mathcal{C}$.

La droite (MN) passe par le centre de Γ. Elle recoupe donc $\mathcal{C}$ en un point M' tel que M soit le milieu de $[NM']$.