TS1 spécialité

Contrôle du samedi 25 janvier 2020 (1 heure)

Prénom et nom : ……………………….…………

Note : ….. / 20

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

Soit n un entier relatif. On pose $a=2n+3$ et $b=n+3$.

1°) Soit d un entier naturel qui divise a et b.
En considérant l'expression $2b-a$, déterminer les valeurs possibles de d. On justifiera soigneusement.

2°) Compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots$ (mod. 3)	0	1	2
$a \equiv \ldots$ (mod. 3)			
$b \equiv \ldots$ (mod. 3)			

3°) On considère les phrases A : « a et b sont premiers entre eux » et B : « n n'est pas un multiple de 3 ».

Quel lien y a-t-il entre A et B ? Justifier.

4°) Cette question est indépendante des précédentes.

On suppose dans cette question que n est un entier naturel quelconque.

Expliquer pourquoi l'égalité $a=b+n$ traduit la division euclidienne de a par b.

Compléter la phrase.

Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est égal à …… et le reste est égal à …… .

II. (7 points : 1°) a) 1 point ; b) 2 points ; 2°) a) 2 points ; b) 2 points)

Certains nombres entiers relatifs peuvent se décomposer en somme de cubes d'entiers relatifs.
Par exemple : $13=4^3+7^3+7^3+(-9)^3+(-2)^3$, $13=2^3+2^3+(-1)^3+(-1)^3+(-1)^3$, $13=1^3+7^3+10^3+(-11)^3$.
Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « somme » de cubes à la place de « somme de cubes d'entiers relatifs » et l'on pourra écrire les sommes sans parenthèses, par exemple $13=4^3+7^3+7^3-9^3-2^3$.
Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « somme » de 5 cubes.
Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes.

1°) a) En utilisant l'égalité $13=1^3+7^3+10^3-11^3$, donner une décomposition de 40 en somme de 5 cubes.

b) On admet que pour tout entier relatif n on a $6n=(n+1)^3+(n-1)^3-2n^3$, égalité que l'on peut aussi écrire $6n=(n+1)^3+(n-1)^3-n^3-n^3$.
En déduire une décomposition de 48 en somme de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en somme de 5 cubes différente de celle donnée au a).

2°) Le nombre 2020 peut s'écrire comme somme de 4 cubes : on a par exemple $2020=13^3+7^3-2^3-8^3$ ou encore $2020=25^3+16^3-26^3-5^3$.
On veut savoir si 2020 peut être décomposé en somme de 2 ou 3 cubes.

a) Recopier et compléter sans justifier le tableau suivant où n désigne un entier relatif.

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9									

b) On déduit du tableau précédent que, pour tout entier relatif n, l'entier n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à −1.

Démontrer que 2020 ne peut pas être décomposé en somme de 2 cubes.
Est-il possible de décomposer 2020 en somme 3 cubes ? On répondra sans justifier à cette question.

III. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ ainsi que les relations de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 3u_n + 2v_n$ pour tout entier naturel n,

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels et on ne cherchera pas à déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

1°) On a calculé les premiers termes des deux suites.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	0	1	4	15	56	209	780	2911	10864	40545	151316	564719	2107560
v_n	1	2	7	26	97	362	1351	5042	18817	70226	262087	978122	3650401

Conjecturer le chiffre des unités de u_n suivant les valeurs de n.

2°) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de v_n puis u_{n+3} en fonction de u_n et de v_n.
On admettra que $u_{n+6} = 1351u_n + 780v_n$ pour tout entier naturel n.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+6} \equiv u_n$ (mod. 10).

4°) À l'aide du résultat de la question précédente, déterminer le chiffre des unités de u_n suivant les valeurs de n.

Corrigé du contrôle du 25-1-2020

I.

Soit n un entier relatif. On pose $a=2n+3$ et $b=n+3$.

1°) Soit d un entier naturel qui divise a et b.
En considérant l'expression $2b-a$, déterminer les valeurs possibles de d. On justifiera soigneusement.

$2b-a=2(n+3)-(2n+3)=3$

Si d divise a et si d divise b, alors d divise toute combinaison linéaire de a et b donc en particulier d divise $2b-a$ donc d divise 3. Or les diviseurs entiers naturels de 3 sont 1 et 3.

2°) Compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n\equiv\ldots$ (mod. 3)	0	1	2
$a\equiv\ldots$ (mod. 3)	0	2	1
$b\equiv\ldots$ (mod. 3)	0	1	2

3°) On considère les phrases A : « a et b sont premiers entre eux » et B : « n n'est pas un multiple de 3 ».

Quel lien y a-t-il entre A et B ? Justifier.

Lorsque $n\equiv 0$ (mod. 3), a et b sont tous deux divisibles par 3 donc a et b ne sont pas premiers entre eux.

Lorsque $n\equiv 1$ (mod. 3) ou $n\equiv 2$ (mod. 3), a et b sont tous les deux non divisibles par 3.
D'après la question 1°), le seul diviseur entier naturel commun à a et b est 1 donc a et b sont premiers entre eux.

« n est un multiple de 3 »

Les phrases A et B sont donc équivalentes.

4°) Cette question est indépendante des précédentes.

On suppose dans cette question que n est un entier naturel quelconque.

Expliquer pourquoi l'égalité $a=b+n$ traduit la division euclidienne de a par b.

L'égalité $a=b+n$ peut aussi s'écrire $a=b\times 1+n$.
Cette égalité ne fait intervenir que des entiers naturels et on a $n<b$ de manière évidente puisque $b=n+3$.

Compléter la phrase.

Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est égal à …… et le reste est égal à …… .

Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est égal à 1 et le reste est égal à n.

II.

Certains nombres entiers relatifs peuvent se décomposer en somme de cubes d'entiers relatifs.
Par exemple : $13=4^3+7^3+7^3+(-9)^3+(-2)^3$, $13=2^3+2^3+(-1)^3+(-1)^3+(-1)^3$, $13=1^3+7^3+10^3+(-11)^3$.
Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « somme » de cubes à la place de « somme de cubes d'entiers relatifs » et l'on pourra écrire les sommes sans parenthèses, par exemple $13=4^3+7^3+7^3-9^3-2^3$.
Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « somme » de 5 cubes.
Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes.

1°) a) En utilisant l'égalité $13=1^3+7^3+10^3-11^3$, donner une décomposition de 40 en somme de 5 cubes.

On a : $40=13+27$. Or $13=1^3+7^3+10^3-11^3$ et $27=3^3$ donc $40=1^3+7^3+10^3-11^3+3^3$.

b) On admet que pour tout entier relatif n on a $6n=(n+1)^3+(n-1)^3-2n^3$, égalité que l'on peut aussi écrire $6n=(n+1)^3+(n-1)^3-n^3-n^3$.

En déduire une décomposition de 48 en somme de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en somme de 5 cubes différente de celle donnée au a).

On a $48=6\times 8$. Or $6n=(n+1)^3+(n-1)^3-n^3-n^3$ donc $6\times 8=(8+1)^3+(8-1)^3-8^3-8^3$ soit $48=9^3+7^3-8^3-8^3$.

2°) Le nombre 2020 peut s'écrire comme somme de 4 cubes : on a par exemple $2020=13^3+7^3-2^3-8^3$ ou encore $2020=25^3+16^3-26^3-5^3$.
On veut savoir si 2020 peut être décomposé en somme de 2 ou 3 cubes.

a) Recopier et compléter sans justifier le tableau suivant où n désigne un entier relatif.

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

b) On déduit du tableau précédent que, pour tout entier relatif n, l'entier n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à −1.

Démontrer que 2020 ne peut pas être décomposé en somme de 2 cubes.
Est-il possible de décomposer 2020 en somme 3 cubes ? On répondra sans justifier à cette question.

On raisonne par l'absurde.
Supposons que 2020 peut être décomposé en « somme » de 2 cubes. Il existe donc deux entiers relatifs a et b tels que $2020=a^3+b^3$.
On sait que le cube d'un entier relatif est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à −1 donc $a^3+b^3\equiv d$ (mod. 9) avec $m\in\{-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\}$.
Or on sait que $2020\equiv 4$ (mod. 9) car tout entier naturel est congru à la somme des ses chiffres en base 10.

L'hypothèse de départ est donc fausse : 2020 ne peut s'écrire comme somme de cubes de deux entiers relatifs.

On démontre de la même façon que 2020 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.

III.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ ainsi que les relations de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 3u_n + 2v_n$ pour tout entier naturel *n*,

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels et on ne cherchera pas à déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de *n*.

1°) On a calculé les premiers termes des deux suites.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	0	1	4	15	56	209	780	2911	10864	40545	151316	564719	2107560
v_n	1	2	7	26	97	362	1351	5042	18817	70226	262087	978122	3650401

Conjecturer le chiffre des unités de u_n suivant les valeurs de *n*.

On observe une périodicité d'ordre 6 dans le chiffre des unités de u_n.

On conjecture que :
- si *n* est de la forme 6*k* $(k \in \mathbb{N})$ le chiffre des unités de u_n est égal à 0 ;
- si *n* est de la forme $6k+1$ $(k \in \mathbb{N})$, le chiffre des unités de u_n est égal à 1 ;
- si *n* est de la forme $6k+2$ $(k \in \mathbb{N})$, le chiffre des unités de u_n est égal à 4 ;
- si *n* est de la forme $6k+3$ $(k \in \mathbb{N})$, le chiffre des unités de u_n est égal à 5 ;
- si *n* est de la forme $6k+4$ $(k \in \mathbb{N})$, le chiffre des unités de u_n est égal à 6 ;
- si *n* est de la forme $6k+5$ $(k \in \mathbb{N})$, le chiffre des unités de u_n est égal à 9.

2°) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de v_n puis u_{n+3} en fonction de u_n et de v_n.
On admettra que $u_{n+6} = 1351u_n + 780v_n$ pour tout entier naturel *n*.

$u_{n+2} = 2u_{n+1} + v_{n+1}$ or $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 3u_n + 2v_n$ donc $\begin{cases} u_{n+2} = 2(2u_n + v_n) + (3u_n + 2v_n) = 7u_n + 4v_n \\ v_{n+2} = 3(2u_n + v_n) + 2(3u_n + 2v_n) = 12u_n + 7v_n \end{cases}$.

On a donc $u_{n+2} = 7u_n + 4v_n$.

Puis exprimons u_{n+3} en fonction de u_n et de v_n.

On a $u_{n+3} = 2u_{n+2} + v_{n+2}$.

Or $\begin{cases} u_{n+2} = 7u_n + 4v_n \\ v_{n+2} = 12u_n + 7v_n \end{cases}$ donc $u_{n+3} = 2(7u_n + 4v_n) + (12u_n + 7v_n)$ soit $u_{n+3} = 28u_n + 15v_n$.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a $u_{n+6} \equiv u_n$ (mod. 10).

1ère méthode :

On a $1351 \equiv 1$ (mod. 10) et $780 \equiv 0$ (mod. 10) donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $1351u_n + 780v_n \equiv 1u_n + 0v_n$ (mod. 10).
Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+6} = 1351u_n + 780v_n$. Donc on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+6} \equiv u_n$ (mod. 10).

2e méthode :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+6} - u_n = 1351u_n + 780v_n - u_n = 1350u_n + 780v_n = 10(135u_n + 78v_n)$
Or tous les termes des suites (u_n) et (v_n) sont des entiers naturels donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $(135u_n + 78v_n) \in \mathbb{N}$.

La différence $u_{n+6} - u_n$ est donc divisible par 10. Donc on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+6} \equiv u_n$ (mod. 10).

4°) À l'aide du résultat de la question précédente, déterminer le chiffre des unités de u_n suivant les valeurs de *n*.

On utilise les deux résultats du cours suivants :

Deux entiers naturels sont congrus modulo *n* (*n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 2) si et seulement si ils ont le même reste dans la division euclidienne par *n*.

Le chiffre des unités d'un entier naturel est égal au reste de la division euclidienne de cet entier naturel par 10.

On note r_n le chiffre des unités de l'écriture en base dix de u_n.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+6} \equiv u_n$ (mod. 10) $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $r_{n+6} = r_n$.

La suite (r_n) est donc périodique de période 6.

En utilisant les premières valeurs de u_n données dans le tableau, on retrouve les cas donnés dans la réponse de la question 1°).