$1^{\text{ère}}$ 6 spécialité

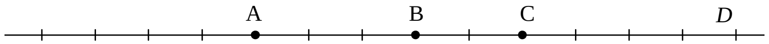
Contrôle du vendredi 17 janvier 2020 (50 minutes)

À disposition :
- calculatrice ;
- fiche préparatoire.

Numéro : ….. **Prénom et nom : ……………….…………………………..** **Note : ….. / 20**

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Soit A, B, C trois points alignés dans cet ordre sur une droite D tels que $AB = 3$ et $BC = 2$.



1°) Le but de cette question est de calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Compléter avec précision la phrase suivante :

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont ……………………………………………………………. .

Achever le calcul de p sur les lignes ci-dessous (en 3 lignes seulement).

………

………

………

2°) Placer sans explication sur la figure ci-dessus les points E et F de la droite D tels que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB} = -14$ et $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{EA} = -7$.

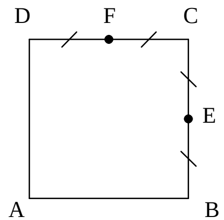
Il est demandé de ne rien écrire sur les figures données dans les exercices **II** et **III**.

II. (5 points : 1°) 4 points ; 2°) 1 point)

Soit ABCD un carré de côté a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$. On note E et F les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CD]$.

1°) Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

$p_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$; $p_2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF}$; $p_3 = \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EF}$; $p_4 = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FE}$.



Écrire les résultats (sous forme d'égalités) dans le tableau ci-contre avec p_1 et p_2 sur la première ligne, p_3 et p_4 sur la deuxième ligne.

Détailler le calcul de p_3 sur les lignes ci-dessous.

………

………

………

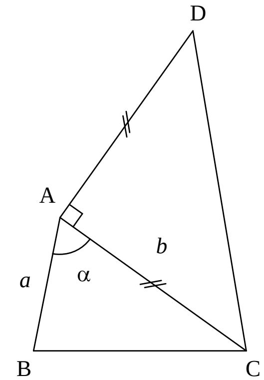
2°) Parmi les égalités ci-dessous, entourer celles qui caractérisent l'appartenance d'un point M quelconque du plan à la droite (AC).

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ $\quad$ $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ $\quad$ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ $\quad$ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

III. (2 points)

Soit ABC un triangle quelconque tel que l'angle $\widehat{BAC}$ ne soit pas obtus. On construit le point D tel que le triangle ACD soit un triangle rectangle isocèle en A situé extérieurement au triangle ABC.

On pose $AB = a$ et $AC = b$ (a et b étant deux réels strictement positifs). On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$ ($\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$).



Exprimer en fonction de a, b, α les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $p_2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Pour p_2, on donnera l'expression la plus simple possible en utilisant une formule de trigonométrie.

………

………

………

………

………

IV. (1 point)

Soit n un entier naturel. On considère le polynôme $P(x) = x \times (x-1) \times ... \times (x-n)$.

On peut écrire $P(x) = \prod_{k=0}^{k=n} (x-k)$.

Donner sans justifier le degré de $P(x)$ en fonction de n.

……………………………………………………………………………………………………

V. (2 points)

Calculer $\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{k=4} (2k+1)$ et $\mathrm{B} = \prod_{k=0}^{k=4} (2k+1)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VI. (1 point)

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$.

À l'aide de la commande « somme » de la calculatrice, calculer $S = \sum_{k=0}^{k=2019} \frac{1}{u_k}$.

On donnera la valeur arrondie au centième.

……… (un seul résultat <u>sans égalité</u>)

VII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\mathrm{A}(-1\,;3)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

1°) Écrire sans justifier une équation de $\mathscr{C}$.

…………………………………………………………………………

2°) À l'aide de l'équation de $\mathscr{C}$ donnée au 1°), calculer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est égale à 4.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VIII. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout entier naturel n.
On a par exemple $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times (-2) - 1 = -5$.

1°) Calculer u_2 et u_3.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

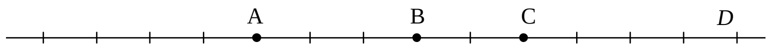
2°) Compléter l'instruction manquante dans la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la valeur de u_n.

```
def terme(n):
  u=-2
  for i in range(1,n+1):
  ………………………………...
  return(u)
```

Corrigé du contrôle du 17-1-2020

I.

Soit A, B, C trois points alignés dans cet ordre sur une droite *D* tels que $AB = 3$ et $BC = 2$.



Le graphique permet d'écrire des égalités vectorielles : par exemple, $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

1°) Le but de cette question est de calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Compléter avec précision la phrase suivante :

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs non nuls colinéaires <u>de sens contraires</u>.

La précision sur le sens est essentielle pour le calcul de *p*.

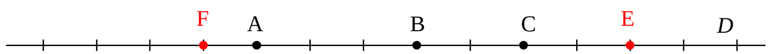
Achever le calcul de *p* sur les lignes ci-dessous (en 3 lignes seulement).

$p = -BA \times BC$ (le signe – provient du fait que les vecteurs sont colinéaires de sens contraires)

$= -3 \times 2$

$= -6$

2°) Placer sans explication sur la figure ci-dessus les points E et F de la droite *D* tels que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB} = -14$ et $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{EA} = -7$.



Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.
Comme $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB} < 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont de sens contraires. Par suite, E appartient à la demi-droite $[AB)$.
De plus, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB} = -14$ donc $AE \times CB = 14$.
Or $CB = 2$. Donc $AE = 4$.

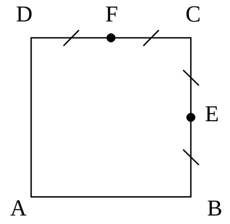
Les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont colinéaires.
Comme $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{EA} < 0$, les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont de sens contraires. Par suite, F appartient à la demi-droite $[EA)$.
De plus, $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{EA} = -7$ donc $FA \times EA = 7$.
Or $EA = 7$. Donc $FA = 1$.

Il est demandé de ne rien écrire sur les figures données dans les exercices **II** et **III**.

II.

Soit ABCD un carré de côté *a* $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$. On note E et F les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CD]$.

1°) Exprimer en fonction de *a* les produits scalaires suivants :
$p_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$; $p_2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF}$; $p_3 = \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EF}$; $p_4 = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FE}$.



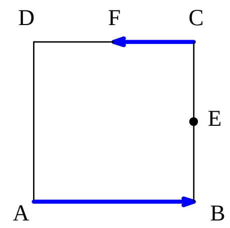
Écrire les résultats (sous forme d'égalités) dans le tableau ci-contre avec p_1 et p_2 sur la première ligne, p_3 et p_4 sur la deuxième ligne.

$p_1 = -\frac{a^2}{2}$	$p_2 = 0$
$p_3 = -\frac{a^2}{4}$	$p_4 = -\frac{a^2}{2}$

Détailler le calcul de p_3 sur les lignes ci-dessous.

Dans chaque cas, il est conseillé de faire une figure propre au brouillon.

• Calcul de p_1 :



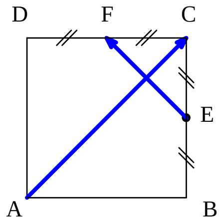
p_1 est le produit scalaire de deux vecteurs non nuls colinéaires de sens contraires (on utilise le parallélisme des côtés opposés dans un carré).

$p_1 = -AB \times CF$

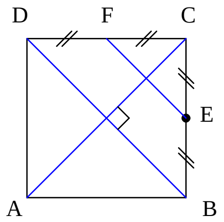
$= -a \times \frac{a}{2}$ ($CF = \frac{a}{2}$ puisque F est le milieu de $[CD]$ par hypothèse)

$= -\frac{a^2}{2}$

• Calcul de p_2 :



p_2 est le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux donc $p_2 = 0$.

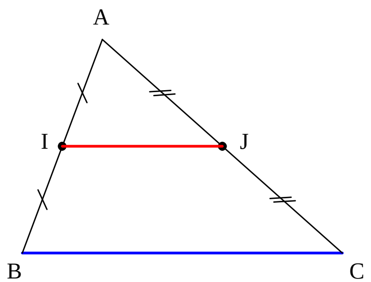


Dans le triangle BCD, E et F sont les milieux respectifs des segments $[\mathrm{BC}]$ et $[\mathrm{CD}]$ donc $(\mathrm{EF}) // (\mathrm{BD})$ (propriété de la droite joignant les milieux de deux côtés.

Or $(\mathrm{BD}) \perp (\mathrm{AC})$ car ABCD est un carré.

Par suite, $(\mathrm{EF}) \perp (\mathrm{AC})$ (propriété : « Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre »).

Propriété du segment et de la droite joignant les milieux de deux côtés dans un triangle quelconque :



Dans un triangle quelconque,
- le segment joignant les milieux de deux côtés a pour longueur la moitié de celle du troisième côté ;
- la droite joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

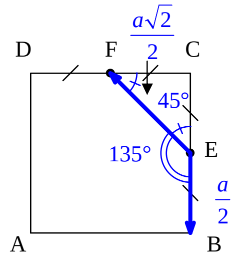
Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Thalès et de sa réciproque.

Sur la figure où ABC est un triangle quelconque, I et J sont les milieux respectifs de $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{AC}]$, on a l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. On la démontre aisément grâce à la relation de Chasles.

- Calcul de p_3 :

$$p_3 = \overrightarrow{\mathrm{EB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}}$$

$$= \mathrm{EB} \times \mathrm{EF} \times \cos \widehat{\mathrm{BEF}}$$



$\mathrm{EB} = \frac{a}{2}$ car E est le milieu de $[\mathrm{BC}]$.

$\mathrm{EF} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (« droite des milieux » dans le triangle BCD ou hypoténuse du triangle CEF rectangle isocèle en C)

$\widehat{\mathrm{BEF}} = 180° - \widehat{\mathrm{CEF}}$

$= 180° - 45°$ (car le triangle CEF est rectangle isocèle en C donc les angles à la base mesurent 45°)

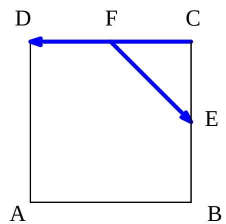
$= 135°$

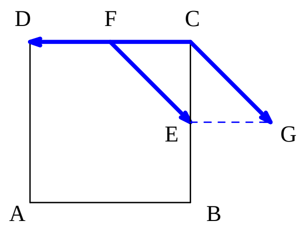
$$p_3 = \frac{a}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \cos 135°$$

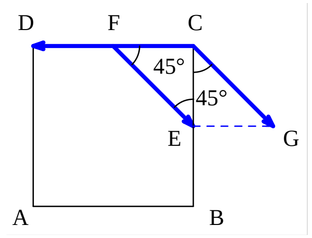
$$= \frac{a}{2} \times \frac{a\cancel{\sqrt{2}}}{2} \times \left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= -\frac{a^2}{4}$$

- Calcul de p_4 :







$p_4 = \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{FE}$

$= CD \times FE \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{FE}}\right)$ (les deux vecteurs n'ont pas la même origine ; l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{FE}}\right)$ apparaît en déplaçant l'un des vecteurs de sorte qu'ils aient tous deux la même origine)

$= a \times \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \times \cos 135°$

$= a \times \dfrac{a\cancel{\sqrt{2}}}{2} \times \left(-\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)$

$= -\dfrac{a^2}{2}$

2°) Parmi les égalités ci-dessous, entourer celles qui caractérisent l'appartenance d'un point M quelconque du plan à la droite (AC).

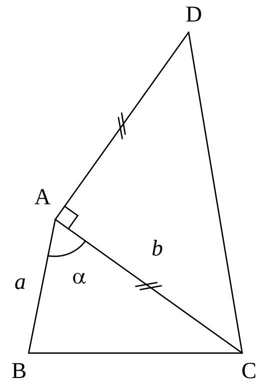
$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{CM} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MC} = 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{EF} = 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} = 0$

On choisit les égalités $\overrightarrow{CM} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{EF} = 0$.

En effet, la droite (AC) est la droite :

- passant par C et orthogonale à (BD) d'où le choix de l'égalité $\overrightarrow{CM} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$;
- passant par A et orthogonale à (EF) d'où le choix de l'égalité $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{EF} = 0$.

III.



Soit ABC un triangle quelconque tel que l'angle $\widehat{BAC}$ ne soit pas obtus. On construit le point D tel que le triangle ACD soit un triangle rectangle isocèle en A situé extérieurement au triangle ABC.
On pose $AB = a$ et $AC = b$ (a et b étant deux réels strictement positifs). On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$ ($\alpha \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$).

Exprimer en fonction de a, b, α les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ et $p_2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$.
Pour p_2, on donnera l'expression la plus simple possible en utilisant une formule de trigonométrie.

$p_1 = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ (expression trigonométrique de définition du produit scalaire)

$= ab \cos \alpha$

$p_2 = AB \times AD \times \cos \widehat{BAD}$

$= ab \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$ (car $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$)

$= ab(-\sin\alpha)$ (formule de trigonométrie $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$ à connaître par cœur qui se retrouve aisément sur le cercle trigonométrique)

$= -ab \sin \alpha$

IV.

Soit n un entier naturel. On considère le polynôme $P(x) = x \times (x-1) \times \ldots \times (x-n)$.

On peut écrire $P(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} (x-k)$.

Donner sans justifier le degré de $P(x)$ en fonction de n.

$P(x)$ est le produit de $n+1$ polynômes de degré 1 donc $P(x)$ est un polynôme de degré $n+1$.

V.

Calculer $A=\sum_{k=0}^{k=4}(2k+1)$ et $B=\prod_{k=0}^{k=4}(2k+1)$.

$A=(2\times 0+1)+(2\times 1+1)+(2\times 2+1)+(2\times 3+1)+(2\times 4+1)$

$=1+3+5+7+9$

$=25$

$B=1\times 3\times 5\times 7\times 9$

$=945$

VI.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=3$ et de raison $r=2$.

À l'aide de la commande « somme » de la calculatrice, calculer $S=\sum_{k=0}^{k=2019}\frac{1}{u_k}$.

On donnera la valeur arrondie au centième.

3,79 (un seul résultat <u>sans égalité</u>)

Il n'y a pas de formule simplifiée permettant de calculer S.

On sait que (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0=3$ et de raison $r=2$. D'après la formule donnant le terme général d'une suite arithmétique, on a : $\forall k\in\mathbb{N} \quad u_k=3+2k$.

On peut donc écrire $S=\sum_{k=0}^{k=2019}\frac{1}{3+2k}$.

Sur la calculatrice, on doit avoir : $\sum_{\mathrm{K}=0}^{2019}\frac{1}{3+2\mathrm{K}}$ (K est une variable muette, elle doit bien être la même dans l'expression et sous le symbole Σ).

On obtient l'affichage 3,787428877 ?
La valeur arrondie au centième de S est donc égale à 3,79.
On peut écrire $S\approx 3,79$.

Complément :

Comme u_k est un entier naturel quel que soit $k\in\mathbb{N}$, on peut dire que $\frac{1}{u_k}\in\mathbb{Q}$ quel que soit $k\in\mathbb{N}$.

Autrement dit, $\frac{1}{u_k}\in\mathbb{Q}$ est toujours une fraction.

S est une somme de fraction donc c'est une fraction.
On ne cherche pas à l'écrire en fraction car ça donnerait des nombres énormes.

VII.

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\mathrm{A}(-1\,;3)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

1°) Écrire sans justifier une équation de $\mathscr{C}$.

$$(x+1)^2+(y-3)^2=8$$

On applique directement la formule donnant une équation du cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R :
$(x-a)^2+(x-b)^2=R^2$ [ou $\sqrt{(x-a)^2+(x-b)^2}=R$].

On calcule le carré du rayon : $\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$.

● On peut aussi donner pour équation de $\mathscr{C}$ l'égalité $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=2\sqrt{2}$ un peu moins pratique pour la suite cependant.

● On ne cherche pas à exprimer x en fonction de y ou y en fonction de x.

● On peut également développer le premier membre pour obtenir une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

On obtient d'abord l'égalité $x^2+2x+1+y^2-6y+9=8$ puis l'égalité $x^2+y^2+2x-6y+2=0$.

Cette dernière égalité est une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$ où a, b, c sont des réels.
De manière générale, une équation cartésienne d'une courbe du plan est une égalité de la forme $f(x, y)=0$.
2°) À l'aide de l'équation de $\mathscr{C}$ donnée au 1°), calculer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est égale à 4.

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est égale à 4 sont les solutions de l'équation : $(x+1)^2+(4-3)^2=8$ (on remplace juste y par 4) soit $(x+1)^2+1=8 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :
$(x+1)^2=7$

$x+1=\sqrt{7}$ ou $x+1=-\sqrt{7}$

$x=-1+\sqrt{7}$ ou $x=-1-\sqrt{7}$

Les abscisses des points cherchés sont $-1+\sqrt{7}$ ou $-1-\sqrt{7}$.

On pourrait contrôler les résultats graphiquement.

Une méthode plus compliquée consisterait à résoudre le système $\begin{cases}(x+1)^2+(y-3)^2=8\\ y=4\end{cases}$.

VIII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout entier naturel n.
On a par exemple $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times (-2) - 1 = -5$.

1°) Calculer u_2 et u_3.

$u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times (-5) - 1 = -11$

$u_3 = 2u_2 - 1 = 2 \times (-11) - 1 = -23$

On peut utiliser la commande $\boxed{\text{rép}}$.

La suite (u_n) n'est ni une suite arithmétique ni géométrique.

2°) Compléter l'instruction manquante dans la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la valeur de u_n.

```
def terme(n):

  u=-2

  for i in range(1,n+1):

  …… ……………………………

  return(u)
```

Voici le programme complété :

```
def terme(n):
  u=-2
  for i in range(1,n+1):
      u=2*u-1
  return(u)
```