TS1 spécialité

Devoir pour le jeudi 16 janvier 2020

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple.

I. 1°) À l'aide d'un programme en Python, déterminer le plus petit entier naturel dont l'écriture du cube en base dix se termine par 2019. On écrira le programme sur la copie.
Vérifier en utilisant le site « dcode » et l'outil de résolution des équations modulaires (https://www.dcode.fr/solveur-equation-modulaire).

2°) Existe-t-il un entier naturel dont l'écriture du cube en base dix se termine par 2020 ?
Indication : On pourra raisonner modulo 100 et faire un tableau de congruences sur la calculatrice (pas sur la copie vu la taille !).

II. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{Z}$ par $f(n) = \frac{n}{3}$ si n est divisible par 3 et $f(n) = 3 - n$ si n n'est pas divisible par 3.
On notera que f est une fonction définie par deux expressions différentes selon que n est divisible par 3 et l'on observera que f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

1°) Déterminer les antécédents de 2019, 2020, – 2019, – 2020 par *f*.
On donnera les réponses directement sans détailler la démarche.
On attend la rédaction suivante : « Les antécédents de … par *f* sont … ».

2°) Déterminer, en rédigeant complètement, les antécédents d'un entier relatif p quelconque par *f*.

Corrigé du devoir pour le 16-1-2020

I.

1°)

1$^{\text{ère}}$ idée :

On utilise le fait que l'écriture en base dix d'un entier naturel se termine par 2019 si et seulement si le reste de la division euclidienne de cet entier par 10000 est égal à 2019.

Initialisation :
x prend la valeur 0

Traitement :
Tantque le reste de la division euclidienne de x^3 par 10000 est différent de 2019 **Faire**
x prend la valeur $x+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher x

Programme Python :

```
x=0
while (x**3) % 10000 !=2019 :
        x=x+1
print(x)
```

On trouve 2939.

On vérifie que $2939^3 = 25386262019$.

2$^{\text{e}}$ idée :

On utilise le fait que les entiers naturels dont l'écriture en base dix se termine par 2019 sont les entiers de la forme de la forme $10000q+2019$ où q est un entier naturel.

Initialisation :
q prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $\sqrt[3]{10000q+2019}$ n'est pas un entier **Faire**
q prend la valeur $q+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher q

Pour la racine cubique, on utilise la puissance $\frac{1}{3}$.

Pour tester le fait que l'on a un entier, on utilise la partie entière (floor).

Cependant, il semble que la réalisation du programme Python ne donne rien.

```
from math import floor

def f(x):
    y=(10000*x+2019)**(1/3)
    return y

x=0
while f(x)!=floor(f(x)):
      x=x+1
print (f(x))
```

```
from math import *

def f(x):
    y=(10000*x+1)**(1/3)
    return y

x=1
while f(x)!=floor(f(x)):
      x=x+1
print (f(x))
```

2°) On cherche s'il existe un entier naturel dont l'écriture du cube en base dix se termine par 2020.

On utilise le fait que si l'écriture en base dix d'un entier naturel se termine par 2020, alors il se termine par 20 et, par conséquent, le reste de la division euclidienne de cet entier par 100 est égal à 20.

Or après réalisation d'un tableau de congruences sur la calculatrice, on observe qu'aucun entier naturel au cube n'est congru à 20 modulo 100.

On en conclut qu'il n'existe pas d'entier naturel dont l'écriture du cube en base dix se termine par 2020.

On a raisonné par l'absurde.

II.

1°)

● L'antécédent de 2019 par f est 6057.

● Les antécédents de 2020 par f sont 6060 et – 2017.

● Les antécédents de – 2019 par f est – 6057.

● L'antécédent de – 2020 par f sont – 6060 et – 2023.

2°) Déterminons en rédigeant complètement, les antécédents d'un entier relatif p quelconque par f.

On doit résoudre l'équation $f(n)=p \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n}{3}=p \\ n\in 3\mathbb{Z} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3-n=p \\ n\notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=3p \\ n\in 3\mathbb{Z} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n=3-p \\ n\notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n=3p \text{ ou } \begin{cases} n=3-p \\ n\notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$

On doit discuter pour le deuxième système.

1er cas : $p\in 3\mathbb{Z}$

Dans ce cas, $3-p\in 3\mathbb{Z}$ donc le système $\begin{cases} n=3-p \\ n\notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$ n'a pas de solution.

2e cas : $p\notin 3\mathbb{Z}$

Dans ce cas, $3-p\notin 3\mathbb{Z}$ donc le système $\begin{cases} n=3-p \\ n\notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$ a pour solution $3-p$.

On vérifie que $3-p$ est différent de $3p$. En effet, l'égalité $3-p=3p$ est équivalente à $4p=3$ qui est impossible dans $\mathbb{Z}$.

Bilan :

Si $p\in 3\mathbb{Z}$, alors p admet un seul antécédent : $3p$.
Si $p\notin 3\mathbb{Z}$, alors p admet deux antécédents : $3p$; $3-p$.

Grâce au résultat de cette question, on peut retrouver les réponses à la question 1°).