Soit α un réel. On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{n+2} \end{cases}$.

Le but de ce problème est d'étudier pour différentes valeurs de α le comportement de (u_n).

Partie 1 : Étude de deux cas particuliers

1°) Dans cette question uniquement, on suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant 1$.

b) Étudier la limite de la suite (u_n).

2°) Dans cette question uniquement, on suppose que $\alpha = 2$.
On considère la fonction *f* définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - (x+1)(x+2)$.

a) Calculer f' et f'' et en déduire que f' est strictement positive sur $[2\,;+\infty[$.

b) Déterminer le signe de *f* sur $[3\,;+\infty[$.

c) Démontrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \geqslant n$ et en déduire la nature de la suite (u_n).

Partie 2 : Étude du cas général

On revient au cas général où α est un réel quelconque. On considère l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}^*$ des termes u_n de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{n+2} \end{cases}$ pour lesquels $u_n \leqslant 1$.

$E_\alpha = \{ n \in \mathbb{N}^* / u_n \leqslant 1 \}$.

1°) a) Déterminer $E_{\frac{1}{2}}$ et E_2.

b) Démontrer que si $E_\alpha \neq \varnothing$, alors la suite (u_n) converge vers 0.

2°) On suppose que $E_\alpha = \varnothing$.

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geqslant \ln(n+2)$.

b) Étudier la limite de la suite (u_n).

Partie 3 : Étude d'une suite auxiliaire

Dans cette partie, on s'intéresse aux deux suites particulières (x_n) et (y_n) définies par

$x_n = \ln\Big(2\ln\big(3\ln(4 \ldots \ln(n+2))\big)\Big)$ et $y_n = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\ldots\sqrt{n+2}}}}}$.

1°) a) Démontrer que $\forall x > 0$, $\ln x < \sqrt{x}$.

b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une inégalité entre x_n et y_n.

2°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $\varphi_n : x \mapsto \ln\Big(2\ln\big(3\ln\big(4 \ldots \ln((n+1)\ln x)\big)\big)\Big)$.

Exprimer x_{n+1} et x_n en fonction de φ_n et étudier les monotonies des suites (x_n) et (y_n).

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{k=n+2} k^{\frac{1}{2^{k-1}}}$.

c) Démontrer que $\forall x > 0 \quad \ln x \leqslant x - 1$.

3°) Dans cette question, on s'intéresse à la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k-1}{2^{k-1}}$.

a) Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^{k-1}}$.

b) On pose pour $x \neq 1$, $\sigma(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} x^k$.

Donner, pour $x \neq 1$, deux expressions de la dérivée $\sigma'(x)$.

c) En déduire la valeur de $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k}{2^{k-1}}$ puis celle de *S*.

4°) a) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \ln y_n$.
Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, $s_n \leqslant 2$.

b) En déduire que les suites (s_n), (x_n) et (y_n) convergent.

Partie 4 : Une partie de $\mathbb{R}$

On désigne par A_0 l'ensemble des réels α tels que $E_\alpha \neq \varnothing$. Dans cette question on notera $u_n(\alpha)$ le terme de rang *n* de la suite (u_n) pour laquelle $u_0 = \alpha$.

1°) Redonner la définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha < \beta$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n(\alpha) < u_n(\beta)$.

3°) Démontrer que si $\beta \in \mathrm{A}_0$, alors $]-\infty, \beta] \subset \mathrm{A}_0$.

4°) Démontrer que A_0 est un intervalle de $\mathbb{R}$.

5°) Démontrer qu'il existe un réel *m* tel que $]-\infty, m[\subset \mathrm{A}_0 \subset]-\infty, m]$.