

2^e Exercices de géométrie dans l'espace (orthogonalité)

Dans les exercices suivants, ABCDEFGH désigne un cube d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

I. Soit O le centre de la face ABCD et U le milieu de [EF].

1°) En considérant le plan médiateur du segment [AB], prouvez que les droites (OU) et (AB) sont orthogonales.

2°) Que pouvez-vous dire des droites (OU) et (EF) ? des droites (OU) et (CD) ?

II. 1°) Quelle est la nature du triangle BDH ? Calculez BH en fonction de a .

2°) a) Quelle est la nature du quadrilatère ABGH ?

b) Calculez $\cos \widehat{AHB}$, déduisez-en une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle \widehat{AHB} .

III. 1°) Quelle est la nature du triangle BEG ?

2°) Prouvez, en utilisant le plan médiateur de [BG], que les droites (DF) et (BG) sont orthogonales.

3°) Prouvez, en considérant le plan médiateur de [BE], que les droites (DF) et (BE) sont orthogonales.

4°) Que pouvez-vous dire de la droite (DF) et du plan (BEG) ?

IV. Soit I le symétrique de D par rapport à C.

1°) a) Que pouvez-vous dire des droites (BD) et (BI) ?

b) Prouvez que la droite (BI) est orthogonale au plan (BHD) ; déduisez-en la nature du triangle BHI.

2°) Calculez de deux façons différentes le volume du tétraèdre BDHI en fonction de a .

3°) Calculez l'aire du triangle BHI en fonction de a .

Vérifiez que l'on a : $[\mathcal{A}(\text{BHI})]^2 = [\mathcal{A}(\text{BDI})]^2 + [\mathcal{A}(\text{ADH})]^2 + [\mathcal{A}(\text{CHI})]^2$.

V. Soit I, J, K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [GH].

Démontrez que (IJK) est le plan médiateur du segment [DF].