TS1 spécialité

Contrôle du mardi 17 décembre 2019 (50 minutes)

Écrire très lisiblement, sans ratures et sans utiliser d'abréviations.

Note : …. / 20

Prénom : ………………………………. **Nom : …………………………………………………**

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit n un entier naturel quelconque.
Le but de l'exercice est de démontrer que $10^{9n+2}+10^{6n+1}+1$ est divisible par 111.

1°) Démontrer $10^3 \equiv 1$ (mod. 111).

………

………

………

2°) À l'aide de ce résultat, recopier et compléter en justifiant $10^{9n+2} \equiv \ldots$ (mod. 111) et $10^{6n+1} \equiv \ldots$ (mod. 111).

………

………

………

………

………

………

………

………

3°) En déduire le résultat demandé.

………

………

………

………

II. (2 points)

Compléter le tableau de congruences ci-dessous où x est un entier relatif.

$x \equiv \ldots$ (mod. 6)	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \ldots$ (mod. 6)						

On considère les phrases A : « $x \equiv 3$ (mod. 6) » et B : « $x^2 \equiv 3$ (mod. 6) ».
Quelle relation peut-on écrire entre A et B ?

………

………

III. (3 points)

1°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel x tel que $3x \equiv 2$ (mod. 4) et $x \equiv 5$ (mod. 13).

………… (une seule réponse sans justifier)

2°) Déterminer le plus grand entier négatif x tel que $x+2 \equiv 3$ (mod. 99).

………… (une seule réponse sans justifier)

3°) Déterminer le plus petit entier naturel x tel que $1-x \equiv 20$ (mod. 25).

………… (une seule réponse sans justifier)

IV. (10 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point ; 6°) 3 points ; 7°) 2 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E l'ensemble des entiers relatifs congrus à 1 modulo n et F l'ensemble des entiers relatifs congrus à – 1 modulo n.

1°) Démontrer que E est stable par le produit c'est-à-dire que pour tout couple $(x\,;\,y)$ d'éléments de E le produit xy appartient à E.

On commencera par rédiger ainsi : « Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'éléments quelconques de E. On a alors $x \equiv 1 \pmod{n}$ et $y \equiv 1 \pmod{n}$. » (modèle à recopier et compléter).

………

………

………

………

2°) Que peut-on dire du produit de deux éléments quelconques de F ? Justifier.

………

………

………

………

3°) Compléter l'implication suivante où x est un entier relatif : « Si $x \in E$, alors $-x \in$ .... »

4°) Dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Que peut-on dire de E et F dans ce cas ?
On répondra brièvement.

………

………

………

………

5°) Dans cette question, on suppose que n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 3.
On se propose de démontrer par l'absurde que $E \cap F = \varnothing$.

On suppose donc que $E \cap F \neq \varnothing$. Par conséquent, il existe au moins un entier relatif x appartenant à E et à F.

Comme $x \in E$, on a $x \equiv 1 \pmod{n}$.

Comme $x \in F$, on a $x \equiv -1 \pmod{n}$.

On peut donc écrire $1 \equiv -1 \pmod{n}$ d'où $2 \equiv 0 \pmod{n}$.

Finir le raisonnement sur les lignes ci-dessous.

………

………

………

………

6°) Dans cette question, on prend $n = 5$.

● Déterminer deux nombres premiers appartenant à E et deux nombres premiers appartenant à F.

…………………… ……………………

● Déterminer le nombre d'entiers relatifs x appartenant à E tels que $-100 \leqslant x \leqslant 100$.

………… (une seule réponse, sans égalité)

● Déterminer un entier négatif x tel que $3x$ appartienne à E.

………… (une seule réponse, sans égalité)

7°) Dans cette question, on prend $n = 8$.
Déterminer, à l'aide d'un tableau de congruences (fait au brouillon) les entiers relatifs x tels que $x^2 \in E$.
Répondre par une phrase correctement rédigée.

………

………

Corrigé du contrôle du 17-12-2019

I.

Soit n un entier naturel quelconque.
Le but de l'exercice est de démontrer que $10^{9n+2}+10^{6n+1}+1$ est divisible par 111.

1°) Démontrer $10^3 \equiv 1$ (mod. 111).

On a $10^3-1=999$.

Or 999 est divisible par 111 donc $10^3 \equiv 1$ (mod. 111).

2°) À l'aide de ce résultat, recopier et compléter en justifiant $10^{9n+2} \equiv ...$ (mod. 111) et $10^{6n+1} \equiv ...$ (mod. 111).

On reprend le résultat de la question précédente : $10^3 \equiv 1$ (mod. 111).

D'une part, en élevant les deux membres à la puissance $3n$, on peut écrire $10^{9n} \equiv 1^{3n}$ (mod. 111) soit $10^{9n} \equiv 1$ (mod. 111).

Par propriété des congruences avec la multiplication, on peut écrire $10^{9n+2} \equiv 10^2$ (mod. 111).

D'autre part, en élevant les deux membres à la puissance $2n$, on peut écrire $10^{6n} \equiv 1^{2n}$ (mod. 111) soit $10^{6n} \equiv 1$ (mod. 111).

Par propriété des congruences avec la multiplication, on peut écrire $10^{6n+1} \equiv 10$ (mod. 111).

3°) En déduire le résultat demandé.

Comme $10^{9n+2} \equiv 100$ (mod. 111) et $10^{6n+1} \equiv 10$ (mod. 111), $10^{9n+2}+10^{6n+1}+1 \equiv 111$ (mod. 111).

On a donc $10^{9n+2}+10^{6n+1}+1 \equiv 0$ (mod. 111).

Par conséquent, $10^{9n+2}+10^{6n+1}+1$ est divisible par 111.

II.

Compléter le tableau de congruences ci-dessous où x est un entier relatif.

$x \equiv ...$ (mod. 6)	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv ...$ (mod. 6)	0	1	4	3	4	1

On considère les phrases A : « $x \equiv 3$ (mod. 6) » et B : « $x^2 \equiv 3$ (mod. 6) ».
Quelle relation peut-on écrire entre A et B ?

D'après le tableau de congruences, on a l'équivalence A $\Leftrightarrow$ B.

III.

1°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel x tel que $3x \equiv 2$ (mod. 4) et $x \equiv 5$ (mod. 13).

18 (une seule réponse sans justifier)

On rentre les fonctions $\text{Y1} = \text{reste}(3\text{X}, 4)$ et $\text{Y2} = \text{reste}(\text{X}, 13)$.

2°) Déterminer le plus grand entier négatif x tel que $x+2 \equiv 3$ (mod. 99).

– 98 (une seule réponse sans justifier)

$x+2 \equiv 3$ (mod. 99) $\Leftrightarrow$ $x \equiv 1$ (mod. 99)

3°) Déterminer le plus petit entier naturel x tel que $1-x \equiv 20$ (mod. 25).

6 (une seule réponse sans justifier)

$1-x \equiv 20$ (mod. 25) $\Leftrightarrow$ $x \equiv -19$ (mod. 25)

IV.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E l'ensemble des entiers relatifs congrus à 1 modulo n et F l'ensemble des entiers relatifs congrus à – 1 modulo n.

1°) Démontrer que E est stable par le produit c'est-à-dire que pour tout couple $(x\,;\,y)$ d'éléments de E le produit xy appartient à E.

On commencera par rédiger ainsi : « Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'éléments quelconques de E. On a alors $x \equiv 1$ (mod. n) et $y \equiv 1$ (mod. n). » (modèle à recopier et compléter).

Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'éléments quelconques de E. On a alors $x \equiv 1$ (mod. n) et $y \equiv 1$ (mod. n).

On peut donc écrire $x \times y \equiv 1 \times 1$ (mod. n) soit $xy \equiv 1$ (mod. n) ce qui permet d'affirmer que $xy \in E$.

On en déduit donc que E est stable par le produit.

2°) Que peut-on dire du produit de deux éléments quelconques de F ? Justifier.

Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'éléments quelconques de F. On a alors $x \equiv -1$ (mod. n) et $y \equiv -1$ (mod. n).

On peut donc écrire $x \times y \equiv -1 \times (-1)$ (mod. n) soit $xy \equiv 1$ (mod. n) ce qui permet d'affirmer que $xy \in E$.

3°) Compléter l'implication suivante où x est un entier relatif : « Si $x \in E$, alors $-x \in F$. »

4°) Dans cette question, on suppose que $n=2$.
Que peut-on dire de E et F dans ce cas ?
On répondra brièvement.

Dans le cas où $n=2$, on peut dire que $-1 \equiv 1$ (mod. 2). Les ensembles E et F sont donc confondus ($E=F$).

5°) Dans cette question, on suppose que n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 3.
On se propose de démontrer par l'absurde que $E \cap F = \varnothing$.

On suppose donc que $E \cap F \neq \varnothing$. Par conséquent, il existe au moins un entier relatif x appartenant à E et à F.

Comme $x \in E$, on a $x \equiv 1 \pmod{n}$.

Comme $x \in F$, on a $x \equiv -1 \pmod{n}$.

On peut donc écrire $1 \equiv -1 \pmod{n}$ d'où $2 \equiv 0 \pmod{n}$.

Finir le raisonnement sur les lignes ci-dessous.

On en déduit que n divise 2 donc $n = 1$ ou $n = 2$ ce qui est impossible puisque $n \geqslant 3$ par hypothèse.

6°) Dans cette question, on prend $n = 5$.

● Déterminer deux nombres premiers appartenant à E et deux nombres premiers appartenant à F.

11 ; 31 19 ; 29

● Déterminer le nombre d'entiers relatifs x appartenant à E tels que $-100 \leqslant x \leqslant 100$.

40 (une seule réponse, sans égalité)

E est l'ensemble des entiers relatifs de la forme $1+5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On cherche les entiers relatifs k tels que $-100 \leqslant 1+5k \leqslant 100 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow -101 \leqslant 5k \leqslant 99$

$\Leftrightarrow -\dfrac{101}{5} \leqslant k \leqslant \dfrac{99}{5}$

$\Leftrightarrow -20{,}2 \leqslant k \leqslant 19{,}8$

k peut donc prendre toutes les valeurs entières de – 20 à 19. Le nombre de valeurs possibles de k est égal à $19-(-20)+1 = 40$.

● Déterminer un entier négatif x tel que $3x$ appartienne à E.

– 3 (une seule réponse, sans égalité)

En effet, $3 \times (-3) = -9$ et $-9 \equiv 1$ (mod. 5).

7°) Dans cette question, on prend $n = 8$.
Déterminer, à l'aide d'un tableau de congruences (fait au brouillon) les entiers relatifs x tels que $x^2 \in E$.
Répondre par une phrase correctement rédigée.

Les entiers relatifs x tels que $x^2 \in E$ sont les entiers relatifs congrus à 1, 3, 5 ou 7 modulo 8.

On peut aussi dire que les entiers cherchés sont les entiers impairs.

On cherche les entiers relatifs x tels que $x^2 \equiv 1$ (mod. 8). On utilise un tableau de congruences à 8 colonnes (puisque l'on raisonne modulo 8).

$x \equiv ...$ (mod. 8)	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2 \equiv ...$ (mod. 8)	0	1	4	1	0	1	4	1

On peut également utiliser la calculatrice pour conjecturer le résultat.