$1^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 13 décembre 2019 (50 minutes)

À disposition :
- calculatrice ;
- fiche préparatoire.

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………

Note : ….. / 20

I. (1 point)

On considère un rectangle dont le périmètre est égal à 6 cm. On note x l'une des dimensions en cm.
Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ exprimée en cm^2 du rectangle en fonction de x. On attend quelques explications succinctes.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

1°) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?

…………………………………………… (une seule égalité d'ensembles)

2°) Résoudre l'équation $f(x)=\dfrac{1}{3}$ (1). On attend exactement 3 lignes pour la résolution et une ligne pour écrire l'ensemble des solutions.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) Soit a un réel quelconque. Déterminer une expression simplifiée de $f(\sin a)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4°) Déterminer $f'(x)$.

…………………………………………………… (un seul résultat, sous forme simplifiée)

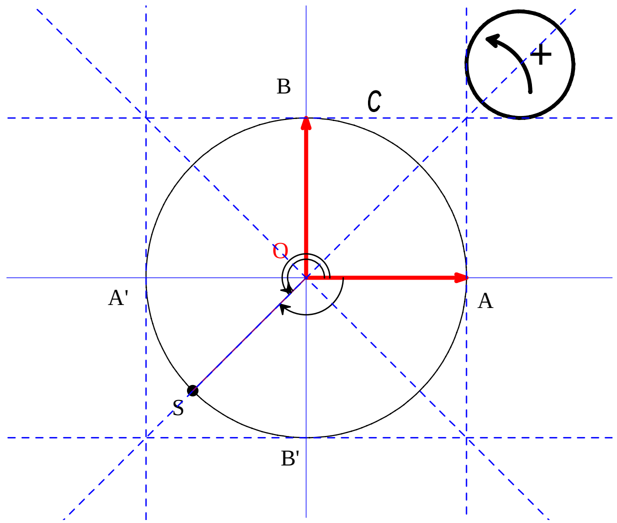
III. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(0\,;1)$, $\text{A}'(-1\,;0)$, $\text{B}'(0\,;-1)$. Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Quels sont les points associés à $\dfrac{5\pi}{2}$ et -15π sur $\mathcal{C}$?

……… (nom du point associé à $\dfrac{5\pi}{2}$) …. (nom du point associé à -15π)

2°) On considère le point S de $\mathcal{C}$ marqué ci-dessous.



Écrire les deux réels associés au point S correspondant aux mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OS}\right)$ (ou de l'angle orienté formé par les demi-droites $[OA)$ et $[OS)$ dans cet ordre) codées ci-dessus.

……………. (écrire les deux réels séparés par une virgule)

3°) Soit x un réel quelconque appartenant à l'intervalle $\left[24\pi\,;\frac{49\pi}{2}\right]$.

Compléter la phrase :

Le point associé à x sur $\mathcal{C}$ appartient à l'arc ………. .

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Les différentes questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Soit x un réel quelconque de l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$.

Quel est le signe de $\cos x$ et de $\sin x$? On répondra sans justifier.

………

………

2°) Déterminer deux réels dont le sinus est égal à 0.

……………. (écrire les deux réels séparés par une virgule)

Recopier et compléter la phrase suivante : « Les réels dont le sinus est égal à 0 sont les réels de la forme … ».

………

3°) Déterminer deux réels dont le sinus est égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

……………. (écrire les deux réels séparés par une virgule)

4°) Soit x un réel quelconque. Simplifier l'expression $A=\cos(3\pi-x)-\sin(\pi-x)-3\cos(5\pi+x)-\sin(-x)$.

………

………

………

V. (3 points)

On pose $x=-\frac{25\pi}{2}$, $y=\frac{41\pi}{3}$, $z=\frac{299\pi}{6}$.

Déterminer la valeur exacte du cosinus et du sinus de x, y, z. On donnera les résultats en justifiant uniquement pour l'une des valeurs au choix.

………

………

………

………

VI. (1 point)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $(x+y)^2+(x-y)^2=8$.

Justifier que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

………

………

………

VII. (1 point)

Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation cartésienne $x^3+x^2-y^2+2=0$ (voir graphique en annexe).

Déterminer les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et avec l'axe des ordonnées.

Contrôler le résultat sur le graphique.

……………. (écrire les deux réels séparés par une virgule)

Question bonus :

Déterminer le(s) abscisse(s) du (des) point(s) d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $x-y=0$.

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………….…………………………….

VIII. (1 point)

On dispose d'un tableau 9×9 dans lequel se trouve une case aléatoire avec un trésor.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

On considère le programme en Python ci-dessous.

La fonction `randint` de la bibliothèque `random` permet de générer aléatoirement des nombres entiers compris entre deux bornes données. La première ligne du programme sera : `from random import randint.`

```
tresor_x = randint(1,9)
tresor_y = randint(1,9)
x = int(input("Position x du trésor : "
y = int(input("Position y du trésor : "
if (x == tresor_x) and (y == tresor_y):
    print("Vous avez trouvé le trésor")
elif (tresor_x – 1 <= x <= tresor_x + 1) and
                              (tresor_y – 1 <= y <= tresor_y + 1):
    print("Vous êtes à une case du but")
else:
    print("Vous êtes loin du but")
```

Les variables tresor_x et tresor_y indiquent respectivement le numéro de la ligne et de la colonne dans laquelle se trouve le trésor.

On suppose que le trésor se trouve dans la ligne 7 et dans la colonne 4.

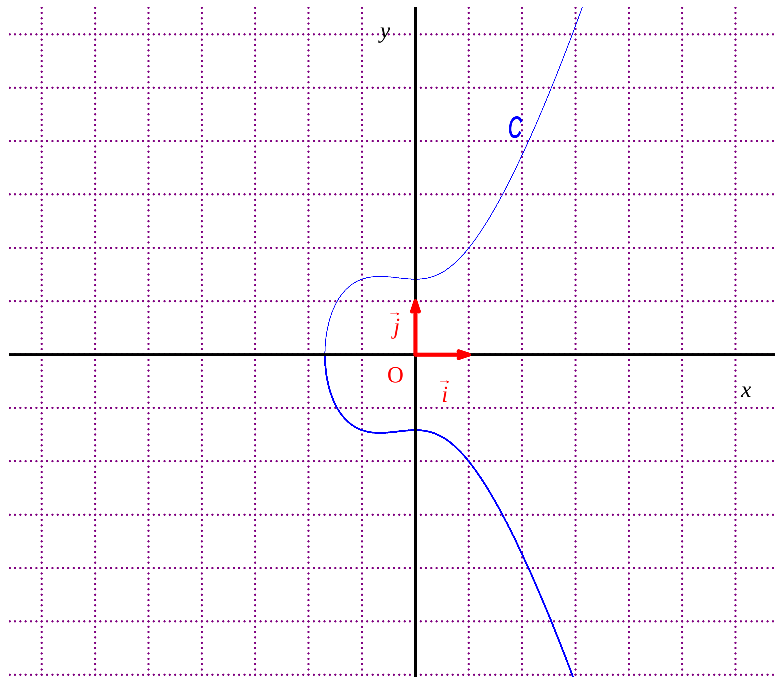
On suppose que dans chaque cas, on rentre d'abord le numéro de la ligne puis le numéro de la colonne.

Si l'on donne 7 et 4 en entrée, le programme affichera ………………………………………………………………… .

Si l'on donne 5 et 6 en entrée, le programme affichera ………………………………………………………………… .

Si l'on donne 9 et 3 en entrée, le programme affichera ………………………………………………………………… .

Annexe : courbe de l'exercice VII



Corrigé du contrôle du 13-12-2019

I.

On considère un rectangle dont le périmètre est égal à 6 cm. On note x l'une des dimensions en cm.
Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ exprimée en cm^2 du rectangle en fonction de x. On attend quelques explications succinctes.

Soit y l'autre dimension du rectangle en cm.

On sait que le périmètre du rectangle est égale 6 cm donc $2(x+y)=6$ d'où $x+y=3$ et donc $y=3-x$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= xy\\ &= x(3-x)\\ &= 3x-x^2\end{aligned}$$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

1°) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?

$$\mathcal{D} = [-1\,;1] \text{ (une seule égalité d'ensembles)}$$

On résout l'inéquation $1-x^2 \geqslant 0$.

Cette inéquation est équivalente à $x^2 \leqslant 1$.

On écrit tout de suite que l'ensemble des solutions est $[-1\,;1]$ (inutile de faire un tableau de signes).

On vérifie le résultat en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

2°) Résoudre l'équation $f(x)=\dfrac{1}{3}$ (1). On attend exactement 3 lignes pour la résolution et une ligne pour écrire l'ensemble des solutions.

(1) est successivement équivalente à :

$\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{3}$

$1-x^2=\dfrac{1}{9}$

$x^2=\dfrac{8}{9}$

$x=\dfrac{\sqrt{8}}{3}$ ou $x=-\dfrac{\sqrt{8}}{3}$

$x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

L'ensemble des solutions de (1) est $S=\left\{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,;-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$.

3°) Soit a un réel quelconque. Déterminer une expression simplifiée de $f(\sin a)$.

$$\begin{aligned}f(\sin a) &= \sqrt{1-\sin^2 a}\\ &= \sqrt{\cos^2 a} \qquad \text{(on utilise la relation fondamentale } \cos^2 a+\sin^2 a=1\\ &= |\cos a|\end{aligned}$$

4°) Déterminer $f'(x)$.

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{(un seul résultat, sous forme simplifiée)}$$

On applique la formule $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ qui donne $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ que l'on simplifie en $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On ne peut pas appliquer la formule $\left(\sqrt{ax+b}\right)'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

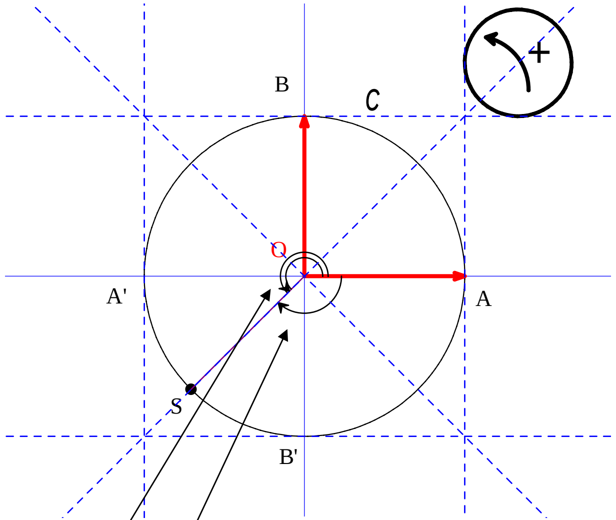
III.

Le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(0\,;1)$, $\text{A'}(-1\,;0)$, $\text{B'}(0\,;-1)$. Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Quels sont les points associés à $\dfrac{5\pi}{2}$ et -15π sur $\mathcal{C}$?

B (nom du point associé à $\dfrac{5\pi}{2}$) A' (nom du point associé à -15π)

2°) On considère le point S de $\mathcal{C}$ marqué ci-dessous.



Écrire les deux réels associés au point S correspondant aux mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OS}\right)$ (ou de l'angle orienté formé par les demi-droites $[OA)$ et $[OS)$ dans cet ordre) codées ci-dessus.

$\dfrac{5\pi}{4}$; $-\dfrac{3\pi}{4}$ (écrire les deux réels séparés par une virgule)

3°) Soit x un réel quelconque appartenant à l'intervalle $\left[24\pi\,;\dfrac{49\pi}{2}\right]$.

Compléter la phrase :

Le point associé à x sur $\mathcal{C}$ appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

$\dfrac{49\pi}{2} = 24\pi + \dfrac{\pi}{2}$

L'image de 24π sur le cercle trigonométrique est A.

L'image de $\dfrac{49\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est la même que $\dfrac{\pi}{2}$ donc B.

L'amplitude de l'intervalle $\left[24\pi\,;\dfrac{49\pi}{2}\right]$ est $\dfrac{\pi}{2}$ d'où le résultat.

IV.

Les différentes questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Soit x un réel quelconque de l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$.

Quel est le signe de $\cos x$ et de $\sin x$? On répondra sans justifier.

L'image de $\dfrac{3\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est B'.

L'image de 2π sur le cercle trigonométrique est A.

La partie du cercle trigonométrique correspondant à l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$ est donc l'arc $\overset{\frown}{AB'}$.

$\cos x$ est donc positif ou nul ; $\sin x$ est négatif ou nul.

2°) Déterminer deux réels dont le sinus est égal à 0.

0 ; π (écrire les deux réels séparés par une virgule)

Recopier et compléter la phrase suivante : « Les réels dont le sinus est égal à 0 sont les réels de la forme … ».

Les réels dont le sinus est égal à 0 sont les réels de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3°) Déterminer deux réels dont le sinus est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{3\pi}{4}$ (écrire les deux réels séparés par une virgule)

4°) Soit x un réel quelconque. Simplifier l'expression $A = \cos(3\pi - x) - \sin(\pi - x) - 3\cos(5\pi + x) - \sin(-x)$.

$A = \cos(2\pi + \pi - x) - \sin x - 3\cos(4\pi + \pi + x) - (-\sin x)$

$= \cos(\pi - x) - \cancel{\sin x} - 3\cos(\pi + x) + \cancel{\sin x}$

$= -\cos x - 3(-\cos x)$

$= -\cos x + 3\cos x$

$= 2\cos x$

V.

On pose $x=-\dfrac{25\pi}{2}$, $y=\dfrac{41\pi}{3}$, $z=\dfrac{299\pi}{6}$.
Déterminer la valeur exacte du cosinus et du sinus de x, y, z. On donnera les résultats en justifiant uniquement pour l'une des valeurs au choix.

On décompose chacun des nombres de manière à faire apparaître un nombre pair de π (on évite les demi-tours).
On se ramène ainsi à des valeurs simples (comprises entre -2π et 2π) dont le cosinus et le sinus peuvent être connus facilement par lecture sur le cercle trigonométrique.

On peut utiliser la méthode correspondant à la détermination d'une mesure principale en radian d'un angle orienté.

• Pour $x=-\dfrac{25\pi}{2}$

On peut utiliser l'encadrement $-28<-25<-24$ (deux multiples de 2 dont le quotient par 2 est un nombre pair).

1ère méthode :

$$x=-\frac{24\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$
$$=-12\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$\cos x=\cos\left(-12\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\sin x=\sin\left(-12\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

2e méthode :

$$x=-\frac{28\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}$$
$$=-14\pi+\frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x=\cos\left(-14\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}=0$$

$$\sin x=\sin\left(-14\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$$

• Pour $y=\dfrac{41\pi}{3}$

On peut utiliser l'encadrement $36<41<42$ (deux multiples de 3 dont le quotient par 3 est un nombre pair).

1ère méthode :

$$y=\frac{36\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}$$
$$=12\pi+\frac{5\pi}{3}$$

$$\cos y=\cos\left(18\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\sin y=\sin\left(18\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2e méthode :

$$y=\frac{42\pi}{3}-\frac{\pi}{3}$$
$$=14\pi-\frac{\pi}{3}$$

$$\cos y=\cos\left(14\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\sin y=\sin\left(14\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

• Pour $z=\dfrac{299\pi}{6}$

On peut utiliser l'encadrement $288<299<300$ (deux multiples de 6 dont le quotient par 6 est un nombre pair).

1ère méthode :

$$z=\frac{300\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$$
$$=50\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$\cos z=\cos\left(100\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin z=\sin\left(100\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

2e méthode :

$$z=\frac{288\pi}{6}+\frac{11\pi}{6}$$
$$=48\pi+\frac{11\pi}{6}$$

$$\cos z=\cos\left(48\pi+\frac{11\pi}{6}\right)=\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin z=\sin\left(48\pi+\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

On vérifie les résultats à l'aide de la calculatrice mise en mode radian.

VI.

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $(x+y)^2+(x-y)^2=8$.
Justifier que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

L'équation proposée est successivement équivalente à :

$$x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2=8$$

$$2x^2+2y^2=8$$

$$x^2+y^2=4$$

On reconnaît une équation de la forme $x^2+y^2=R^2$ avec $R=2$.

On peut donc affirmer que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 2.

VII.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation cartésienne $x^3+x^2-y^2+2=0$ (voir graphique en annexe).
Déterminer les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et avec l'axe des ordonnées.
Contrôler le résultat sur le graphique.

$\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$ (écrire les deux réels séparés par une virgule)

$\mathcal{C}$ est une courbe définie de manière implicite c'est-à-dire par une équation de la forme $f(x, y)=0$ (f est une fonction de deux variables).

On résout l'équation $0^3+0^2-y^2+2=0$ soit $y^2=2$.

On contrôle le résultat sur le graphique.

Question bonus :

Déterminer le(s) abscisse(s) du (des) point(s) d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $x-y=0$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation $x^3+x^2-x^2+2=0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$x^3=-2$

$x=-\sqrt[3]{2}$

Il y a une commande de la calculatrice correspondant à la racine cubique d'un réel.

VIII.

On dispose d'un tableau 9×9 dans lequel se trouve une case aléatoire avec un trésor.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

On considère le programme en Python ci-dessous.

La fonction `randint` de la bibliothèque `random` permet de générer aléatoirement des nombres entiers compris entre deux bornes données. La première ligne du programme sera : `from random import randint`.

```
tresor_x = randint(1,9)
tresor_y = randint(1,9)
x = int(input("Position x du trésor : "
y = int(input("Position y du trésor : "
if (x == tresor_x) and (y == tresor_y):
    print("Vous avez trouvé le trésor")
elif (tresor_x - 1 <= x <= tresor_x + 1) and
                              (tresor_y - 1 <= y <= tresor_y + 1):
    print("Vous êtes à une case du but")
else:
    print("Vous êtes loin du but")
```

Les variables tresor_x et tresor_y indiquent respectivement le numéro de la ligne et de la colonne dans laquelle se trouve le trésor.

On suppose que le trésor se trouve dans la ligne 7 et dans la colonne 4.

On suppose que dans chaque cas, on rentre d'abord le numéro de la ligne puis le numéro de la colonne.

Si l'on donne 7 et 4 en entrée, le programme affichera "Vous avez trouvé le trésor".

Si l'on donne 5 et 6 en entrée, le programme affichera "Vous êtes loin du but".

Si l'on donne 9 et 3 en entrée, le programme affichera "Vous êtes loin du but".

Annexe : courbe de l'exercice VII