1$^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 29 novembre 2019 (50 minutes)

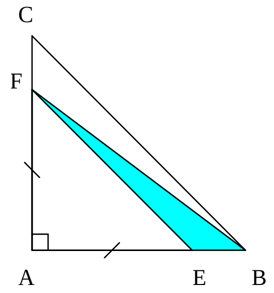
À disposition :
- calculatrice ;
- fiche préparatoire.

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………..

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)



Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = AC = 4$.
Soit E un point appartenant à $[AB]$ et F un point appartenant à $[AC]$ tels que $AE = AF = x$ où x est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;4]$.
On note $f(x)$ l'aire du triangle BEF.

1°) Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

………

………

………

2°) À quelle famille de fonctions appartient la fonction *f* ? Justifier.

………

………

Faire le tableau de variations de *f* (on rappelle que *f* est définie sur l'intervalle $[0\,;4]$).
On fera figurer les valeurs des extremums (calculés au préalable au brouillon).

Décrire les variations de *f* par des phrases.

………

………

Pour quelle valeur de *x* l'aire de BEF est-elle maximale ? Répondre par une phrase.

………

………

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

À tout réel *m* on associe la fonction $f_m : x \mapsto mx^2 + (2m-1)x + m$ définie sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}_m$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Quelle est la nature de $\mathcal{C}_m$? On discutera suivant les valeurs de *m*.

………

………

………

………

2°) **Question plus difficile à faire à la fin.**
Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.
Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_m$ en ce point ?

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x+\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) =$ .... (résultat « brut », sans transformation).

2°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $-\sqrt{3}$.

3°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $3x - y = 0$.

4°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 2.

5°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.

2°)	3°)	4°)	5°)
....	....	....	....

IV. (4 points : 1 point par calcul)

On effectuera les calculs au brouillon. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x) = \left(x^2 - x + 4\right)^5$ $\quad$ $f'(x) =$

2°) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$ $\quad$ $f'(x) =$

3°) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$ $\quad$ $f'(x) =$

4°) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 6}{x-1}$ $\quad$ $f'(x) =$

V. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que pour tout réel x on a $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

....

....

....

....

Compléter sans explication la phrase :

f' s'annule en .... [écrire la (ou les) valeur(s) de x, sans égalités].

Dans un même tableau, étudier avec soin le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
On calculera au brouillon les extremums locaux et l'on complétera les variations avec ces extremums.

VI. (2 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 10$ et D la droite d'équation $y = 2x$.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.

....

....

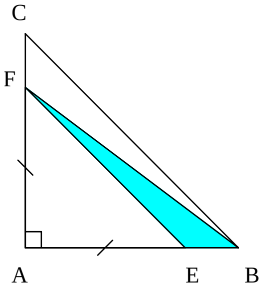
....

....

Corrigé du contrôle du 29-11-2019

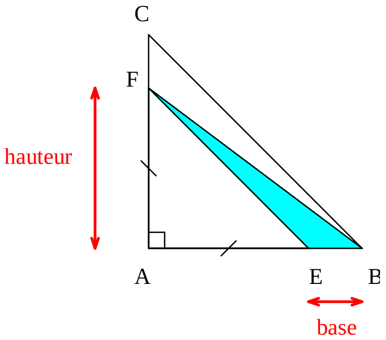
I.

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = AC = 4$.
Soit E un point appartenant à $[AB]$ et F un point appartenant à $[AC]$ tels que $AE = AF = x$ où x est un réel quelconque de l'intervalle $[0 ; 4]$.
On note $f(x)$ l'aire du triangle BEF.



1°) Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Pour calculer l'aire du triangle BEF, on n'a pas le choix : on doit prendre $[BE]$ pour base. La hauteur issue de F est $[AF]$ (extérieure au triangle).



$$f(x) = \mathcal{A}_{\text{BEF}}$$

$$= \frac{\text{BE} \times \text{AF}}{2}$$

$$= \frac{(4-x) \times x}{2}$$

Autre méthode (beaucoup moins bonne donc à éviter) :

$$f(x) = \mathcal{A}_{\text{ABF}} - \mathcal{A}_{\text{AEF}}$$

2°) À quelle famille de fonctions appartient la fonction f ? Justifier.

$$f(x) = \frac{4x - x^2}{2}$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2}$$

f admet une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.

Donc f appartient à la famille des fonctions polynômes du second degré.
Faire le tableau de variations de f (on rappelle que f est définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$).
On fera figurer les valeurs des extremums (calculés au préalable au brouillon).

On utilise les coefficients $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 0$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		4
Variations de f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$$f(2) = \frac{2 \times (4-2)}{2} = 2$$

Décrire les variations de f par des phrases.

f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2 ; 4]$.

Pour quelle valeur de x l'aire de BEF est-elle maximale ? Répondre par une phrase.

D'après le tableau de variations de f, l'aire de BEF est maximale pour $x = 2$. Dans ce cas, E et F sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

On peut remarquer que de BEF est minimale pour $x \in \{0 ; 4\}$ et vaut 0 dans ce cas.

II.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto mx^2 + (2m-1)x + m$ définie sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}_m$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Quelle est la nature de $\mathcal{C}_m$? On discutera suivant les valeurs de m.

On peut affirmer que f_m est un polynôme de degré au plus égal à 2.

On discute suivant le coefficient de x^2 c'est-à-dire m.

• 1^er cas : $m \neq 0$

Dans ce cas, f_m est une fonction polynôme du second degré. Par conséquent, $\mathcal{C}_m$ est une parabole.

• 2^e cas : $m=0$

Dans ce cas, $\forall x\in\mathbb{R}\quad f_0(x)=-x$. $\mathcal{C}_0$ est donc une droite (droite d'équation $y=-x$).

On peut faire un tableau pour bien distinguer fonction et représentation graphique.

Valeur de m	Nature de f_m	Nature de $\mathcal{C}_m$	Commentaires
$m\neq 0$	Fonction polynôme du second degré	Parabole	Tournée vers le haut si $m>0$ Tournée vers le bas si $m<0$
$m=0$	Fonction linéaire	Droite (d'équation $y=-x$)	Droite passant l'origine

2°) **Question plus difficile à faire à la fin.**
Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par un point fixe A dont on donnera les coordonnées.
Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_m$ en ce point ?

$\mathcal{C}_m$ a pour équation $y=mx^2+(2m-1)x+m$.

Cette équation peut aussi s'écrire $y=m\left(x^2+2x+1\right)-x$ soit encore $y=m(x+1)^2-x$.

Cette dernière forme conduit à considérer la valeur de x qui annule $(x+1)^2$ à savoir – 1.

Toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par le point $\mathrm{A}(-1;1)$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f_m'(x)=2mx+2m-1$

$f_m'(-1)=2m\times(-1)+2m-1=-1$

La tangente à $\mathcal{C}_m$ en A a pour coefficient directeur – 1.

Autre manière :
On raisonne par condition nécessaire et vérification.
Pour démontrer que les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par un point fixe, on cherche le point d'intersection de deux courbes $\mathcal{C}_m$ particulières, par exemple , $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$, puis on vérifie ensuite qu'il appartient à n'importe quelle courbe $\mathcal{C}_m$.

III.

On considère la fonction $f : x\mapsto 2x+\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Compléter l'égalité suivante : $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f'(x)=2-\dfrac{1}{x^2}$ (résultat « brut », sans transformation).

2°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $-\sqrt{3}$.

3°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $3x-y=0$.

4°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 2.

5°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.

2°)	3°)	4°)	5°)
$\dfrac{5}{3}$	1 et – 1	$\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2°) On calcule $f'\left(-\sqrt{3}\right)=2-\dfrac{1}{\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$.

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice.

3°) D a pour équation $y=3x$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation $2x+\dfrac{1}{x}=3x\quad(1)$.

(1) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$\dfrac{1}{x}=x$

$x^2=1$

$x=1$ ou $x=-1$

3°) Les abscisses des points cherchés sont les solutions de l'équation $f'(x)=-2$ soit $2-\dfrac{1}{x^2}=-2\quad(2)$.

(2) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$4=\dfrac{1}{x^2}$

$x^2=\dfrac{1}{4}$

$x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=-\dfrac{1}{2}$

5°) On résout l'équation $f'(x)=0$ c'est-à-dire l'équation $2-\dfrac{1}{x^2}=0 \quad (3)$.

(3) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$2=\dfrac{1}{x^2}$

$x^2=\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

IV.

On effectuera les calculs au brouillon. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x)=\left(x^2-x+4\right)^5$ $\qquad f'(x)=5(2x-1)\left(x^2-x+4\right)^4$

On applique la formule $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$.

2°) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^3}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{3x^2}{\left(1-x^3\right)^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \quad f'(x)=-\dfrac{-3x^2}{\left(1-x^3\right)^2}$ $\qquad$ (formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$)

$=\dfrac{3x^2}{\left(1-x^3\right)^2}$ (résultat final)

3°) $f(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^2}$ $\qquad f'(x)=-\dfrac{4}{(2x-1)^3}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\} \quad f'(x)=-\dfrac{2\times 2}{(2x-1)^3}$ $\qquad$ (formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$)

$=-\dfrac{4}{(2x-1)^3}$

4°) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-6}{x-1}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{x^2-2x+8}{(x-1)^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \quad f'(x)=\dfrac{(2x-2)\times(x-1)-\left(x^2-2x-6\right)\times 1}{(x-1)^2}$

$=\ldots$

$=\dfrac{x^2-2x+8}{(x-1)^2}$ (résultat final)

V.

On considère la fonction $f: x\mapsto \dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que pour tout réel x on a $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

On applique la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

f appartient à la famille des fonctions rationnelles.
De plus, *f* est définie sur $\mathbb{R}$.
Or une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.
Donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\dfrac{(2x-1)\times\left(x^2+1\right)-\left(x^2-x+1\right)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

$=\dfrac{2x^3-x^2+2x-1-\left(2x^3-2x^2+2x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

$=\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$

Compléter sans explication la phrase :

f' s'annule en 1 et en – 1 [écrire la (ou les) valeur(s) de *x*, sans égalités].

Dans un même tableau, étudier avec soin le signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.
On calculera au brouillon les extremums locaux et l'on complétera les variations avec ces extremums.

x^2-1 est un polynôme du second degré « incomplet en *x* ».

On applique la règle du signe d'un polynôme du second degré.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de x^2-1		$+$	0	$-$	0	$-$	
Signe de $\left(x^2+1\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

On vérifie le résultat en traçant la représentation graphique grâce à la calculatrice.

On calcule les extremums locaux.

$$f(-1)=\frac{(-1)^2-(-1)+1}{(-1)^2+1}=\frac{1+1+1}{2}=\frac{3}{2}\quad\text{(maximum local)}$$

$$f(1)=\frac{1^2-1+1}{1^2+1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad\text{(minimum local)}$$

VI.

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2=10$ et D la droite d'équation $y=2x$.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation $x^2+(2x)^2=9\quad(1)$.

(1) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$x^2+4x^2=10$

$5x^2=10$

$x^2=2$

$x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.